

**NOU**

**3000**

DE PROBLEME PENTRU  
APROFUNDAREA ȘI  
CONSOLIDAREA  
CUNOȘTINȚELOR

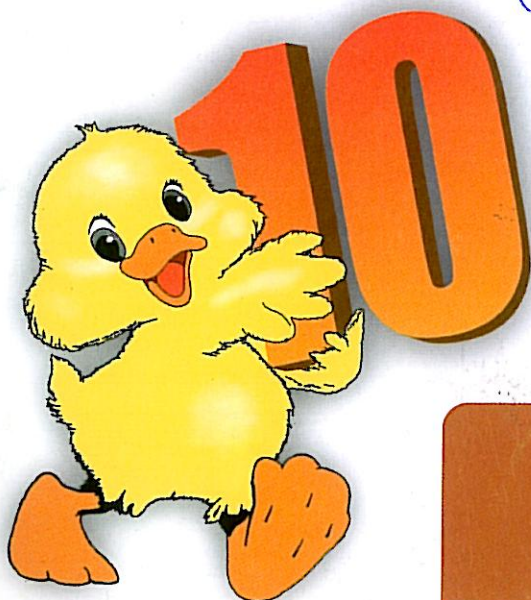
# CULEGERE DE PROBLEME DE MATEMATICĂ

pentru clasa a 6-a

---

**Ioana Monalisa MANEA**  
**Cristina NEAGOE**

*Cozma  
Maria*



**+400**

DE PROBLEME  
PENTRU PREGĂTIREA  
EVALUĂRII NAȚIONALE



## Cuvântul autorilor

IOANA MONALISA MANEA  
CRISTINA NEAGOE

Călăuziți de principiul „Educația se face prin motivarea pozitivă a elevului”, am elaborat o culegere de probleme de matematică care să transmită cunoștințele într-un mod clar și concis în împrejurări desprinse din realitatea cotidiană. În acest mod cartea devine accesibilă și prietenoasă, motivantă și atrăgătoare, optimistă și folositoare. Dorim să vedem din partea ta cum gândești soluția rezolvării problemei.

# CULEGERE DE PROBLEME

Cele **3000** de subiecte din carte sunt structurate pe trei nuveluri de complexitate progresivă și sunt prezentate într-un singur volum pentru ambele semestre. Nu am neglijat nici problemele de perspicacitate și logică atât de dragi ție. Le vei găsi la sfârșitul lecției și au fost create pentru a vă relaxa. Sunt prevăzute în capitole separate atât probleme de lucrări semestriale dar și pentru pregătirea concursurilor școlare.

Fiecare capitol începe cu un sumar de **noțiuni teoretice** și se încheie cu **teste recapitulative**.

Ne-am străduit să-ți motivăm așteptările, stimulându-ți curiozitatea, pentru ca în final să ai satisfacția învingătorului.

Noi, autorii, dorim să venim în întâmpinarea ta, alăturându-ne efortului depus de către profesorul tău și să te ajutăm, ca buni prieteni, să urci treptele cunoașterii matematicii. Curaj! Nu ești singur și nu uita că „**Dacă vrei poți!**”.

La acest nou început de an școlar îți urăm : „**Mult succes!**”.

PENTRU CLASA A VI-a  
EDIȚIA XX

revizuită și adăugită în conformitate cu  
programa școlară  
pentru clasa a VI-a

*Cozma Maria*  
*Roxana*

EDITURA LOGOS JUNIOR  
BUCUREȘTI



Senior redactor : Mihaela Merylu Zamfirache

**Lucrarea este avizată cu numărul 74896 / 2002 în cadrul Comisiei  
Naționale de Matematică pentru a fi utilizată în clasă și la  
pregătirea suplimentară a elevilor**

**Referent științific : prof. Elena Matrosenco**

**Referent științific : prof. Marius Modoiu**

**Descrierea CIP a Bibliotecii Naționale a României**

**MANEA, IOANA MONALISA**

**Țulegere de probleme de matematică pentru clasa a VI-a /**

Manea Ioana Monalisa, Neagoe Cristina - Ed. a 20-a, rev. -

București : Logos Junior, 2013

ISBN 978-973-7619-54-9

I. Neagoe, Cristina

51(075.33)(076)

## CUPRINS

Cap. I - TESTE DE EVALUARE ÎNȚIALĂ .....	3
Cap. II - MULȚIMEA NUMERELOR NATURALE .....	6
Cap. III - NUMERE RAȚIONALE POZITIVE.....	15
Cap. IV - MODELE DE LUCRĂRI SEMESTRIALE - SEMESTRUL I .....	37
Cap. V - RAPOARTE ȘI PROPORȚII.....	40
Cap. VI - NUMERE ÎNTREGI.....	55
Cap. VII - MODELE DE LUCRĂRI SEMESTRIALE - SEMESTRUL II .....	71
Cap. VIII - DREAPTA .....	74
Cap. IX - UNGHIUL .....	78
Cap. X - CONGRUENȚA TRIUNGHURILOR .....	87
Cap. XI - PERPENDICULARITATE ÎN PLAN .....	93
Cap. XII - PARALELISM .....	98
Cap. XIII - PROPRIETĂȚILE TRIUNGHULUI .....	101
Cap. XIV - PROBLEME PENTRU PREGĂTIREA CONCURSURILOR ȘCOLARE .....	113
Cap. XV - RECAPITULARE PENTRU TESTARE .....	114
Cap. XVI - TESTE PENTRU EVALUARE .....	120
SOLUȚII .....	127

Toate drepturile asupra acestei ediții sunt rezervate editurii Logos Junior  
Pentru informații și comenzi telefon 021.320.96.86.; 0722.438.539

Tiparul executat la S.C. MEDIAPRINT S.R.L.



## **Capitolul I**

### **TESTE DE EVALUARE ÎNȚĂLĂ**

#### **Testul 1**

##### **Partea I**

- 1). Transformați 1,2 în fracție ordinară ireductibilă.
- 2). Transformați :  $1,7 \text{ dm}^2 = \dots \text{ cm}^2$
- 3). Să se calculeze :  $0,4 + 2,4 : 4 =$
- 4). Calculați :  $2^2 + 2^0 =$
- 5). Aflați toți divizorii lui 6.
- 6). Cel mai mare număr impar de 2 cifre distincte este :  
a). 99                      b). 87                      c). 91                      d). 97
- 7). Intersecția mulțimilor  $\{3; 8; 7\}$  și  $\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$  este :  
a).  $\{3\}$                       b).  $\{8; 7\}$                       c).  $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}$
- 8).  $\frac{5}{6}$  din 30 este :    a). 36                      b). 25                      c). 30
- 9). Dacă  $\sqrt{2x} : 5$  atunci x este :    a). 0 sau 5                      b). 0                      c). 5

##### **Partea a II-a**

- 10). Calculați :  $(2^5 + 2^2) : 6 + 2^2 + 2^1 + 2^0 - 1^{2012}$
- 11). Rezolvați :  
a).  $0,2x + 7,2 = 10$                       b).  $3x + 2 = 2(x + 1) + 3$
- 12). În rezervor de apă este un paralelipiped cu dimensiunile 0,3 m, 17 dm, 200 cm.  
a). Ce volum are rezervorul ?  
b). Dacă apa din rezervor este pusă în sticle de 0,5 l, câte sticle se folosesc ?
- 13). Media aritmetică a 3 numere este 14. Știind că primul este cu 7 mai mare decât al doilea și al treilea este de 3 ori mai mare decât al doilea, aflați numerele.

#### **Testul 2**

##### **Partea I**

- 1). Cel mai mic număr natural cu 3 divizori este .....
- 2). Rezultatul calculului  $1,32 : 0,6 - 1,1^2$  este .....
- 3). Dintre  $4^{12}$  și  $8^9$  mai mare este .....
- 4). Aria dreptunghiului cu  $l = 50 \text{ cm}$  și  $L = 0,6 \text{ m}$  este .....  $\text{cm}^2$ .
- 5). Numărul  $\frac{3}{5}$  transformat în fracție zecimală este .....



6). Dacă  $A = \{3; 4; 6\}$  și  $B = \{1; 2; 4; 5; 6; 7\}$  atunci  $\text{Card } A \cap B$  este egal cu .....

7). Dacă  $x = 1$  este soluție pentru  $2x + 3a = 20$  atunci  $a$  este egal .....

8). La împărțirea lui 2414 la 4 se obține câtul ..... și restul .....

9). Dacă  $\overline{xxx} : 2$  atunci  $x \in$  .....

## Partea a II-a

10). Calculați :  $(3^3 + 1024 : 2^6 - 2012^0) : 2 - 4^2 =$

11). Să se afle două numere dacă media lor aritmetică este 22 și primul împărțit la al doilea dă câtul 3 și restul 4.

12). Rezolvați în mulțimea numerelor naturale :

a).  $2(x + 3) - 4 = x - 7$

b).  $2x + 7 \leq 11,2$

13). O cutie plină cu 64 pachetele de biscuiți cântărește 5 kg. Știind că un pachetel de biscuiți cântărește 75 g, să se afle cât cântărește cutia goală.

## Testul 3

### Partea I

1). Rezultatul calculului  $54 : 2 + 7$  este :

- a). 6                      b). 34                      c). 20                      d). 30

2). Fie mulțimile  $A = \{1; 2; 4; 5; 7; 8\}$  și  $B = \{3; 4; 5; 6; 7\}$ . Mulțimea  $B - A$  are un număr de elemente egal cu :

- a). 1                      b). 2                      c). 3                      d). 4

3). Cifra  $x$  pentru care numărul  $\overline{245x}$  este divizibil cu 5 este :

- a). 0                      b). 2                      c). 3                      d). 7

4). Rezultatul calculului  $1224 : 12$  este egal cu :

- a). 12                      b). 21                      c). 201                      d). 102

5). Numărul 1,(6) transformat în fracție ordinară ireductibilă este egal cu :

- a).  $\frac{16}{9}$                       b).  $\frac{5}{3}$                       c).  $\frac{1}{6}$                       d).  $\frac{2}{3}$

6). Media aritmetică a numerelor  $a = 2,56$  și  $b = 3,8$  este egală cu :

- a). 6,36                      b). 3,12                      c). 2,94                      d). 3,18

7). Transformând un ar în  $m^2$  se obține :

- a).  $0,1 m^2$                       b).  $10 m^2$                       c).  $100 m^2$                       d).  $1000 m^2$

8). Perimetrul unui dreptunghi este egal cu 36 cm iar lățimea este egală cu 8 cm. Lungimea este egală cu : a). 10 cm                      b). 28 cm                      c). 20 cm                      d). 26 cm

9). Rezultatul calculului  $1,4 - 1,2 + 1\frac{4}{5}$  este egal cu :

- a). 4,5                      b). 3,8                      c). 5                      d). 2

### Partea a II-a

10). Să se calculeze :  $2^{15} : (2^4)^3 - 2^2 + 1^7$ .



- 11). Rezolvați în mulțimea numerelor naturale ecuația :  $2,7x - 6 = 0,7x + 12$
- 12). Un automobil a parcurs 65% dintr-un drum și mai are de parcurs 70 km. Câți km are întregul drum ?
- 13). Să se calculeze în  $\text{cm}^2$  :  $48 \text{ cm}^2 + 1,08 \text{ dm}^2 - 0,0054 \text{ m}^2 + 21600 \text{ mm}^2$ .
- 14). Suma a două numere este 1122. Să se determine cele două numere știind că împărțind un număr la celălalt se obține câtul 8 și restul 6.

## Testul 4

### Partea I

- 1). Rezultatul calculului  $9 + 14 \cdot 5 - 3$  este egal cu :  
a). 97                      b). 31                      c). 61                      d). 40
- 2). Fie mulțimile  $A = \{0; 1; 2; 3\}$  și  $B = \{2; 3; 5; 9\}$ . Numărul de elemente ale mulțimii  $A \cap B$  este egal cu :  
a). 1                      b). 2                      c). 4                      d). 8
- 3). Valoarea cifrei x pentru care numărul  $\overline{346x}$  se divide cu 10 este :  
a). 0                      b). 2                      c). 5                      d). 7
- 4). Care din următoarele numere pot fi scrise ca o putere cu baza 3 ?  
a). 6                      b). 18                      c). 81                      d). 33
- 5). Rezultatul calculului  $8241 : 41$  este egal cu :  
a). 12                      b). 21                      c). 102                      d). 201
- 6). Numărul  $37,9$  scris sub formă de fracție ordinară este :  
a).  $\frac{37}{9}$                       b).  $\frac{379}{10}$                       c).  $\frac{9}{37}$                       d).  $\frac{379}{100}$
- 7). Restul împărțirii  $1037 : 15$  este egal cu :  
a). 69                      b). 5                      c). 11                      d). 2
- 8). Perimetrul unui pătrat cu latura de 0,5 m transformat în cm este egal cu :  
a). 2 cm                      b). 20 cm                      c). 200 cm                      d). 2000 cm
- 9). Un elev parcurge un sfert din drumul către școală în 15 minute. Tot drumul îl va parcurge în :  
a). 60 min                      b). 50 min                      c). 45 min                      d). 30 min

### Partea a II-a

- 10). Media aritmetică a patru numere consecutive este egală cu 78,5. Să se afle cel mai mare număr și cel mai mic.
- 11). Să se rezolve în N ecuația :  $3 \cdot (5x + 2) = 5(x + 6) + 26$
- 12). Numărul fetelor reprezintă 20% din numărul băieților. Câte fete sunt, dacă în clasă sunt 24 de elevi ?
- 13). Ce cantitate de legume s-a transportat în 28 de lăzi, fiecare cântărind 32 kg, dacă o ladă goală cântărește 2 kg ?



# ALGEBRA

## Capitolul II

### MULTIMEA NUMERELOR NATURALE

**\*\***

1). Să se afle câtul și restul împărțirii primului număr la cel de-al doilea în fiecare caz în parte și apoi să se facă proba :

- a). 126 și 32    b). 1004 și 17    c). 3251 și 21    d). 46508 și 102    e). 3050 și 15

2). Calculați :

- a).  $(225 : 9 + 1024 : 16 - 2^3) : 9 =$     b).  $(512 : 2^6 + 2^3) : 2^4 =$     c).  $[(11^2 + 2^3) : 5 - 4^2] : 3 =$   
d).  $(196 : 14 + 19600) : 7 + 2^2 =$     e).  $(432 : 24 - 4^2) : 9 - 4^2 =$   
f).  $[(516 : 3 - 13^2) : 2^4 - 6^2] : 2^2 =$     g).  $(5016 : 6 - 3^6 + 1) : 3 - 6^2 =$

3). Să se calculeze :

- a)  $[15^2 - (2048 : 4 + 2^6) : 3] : 11 =$     b)  $[(54 : 3^2 - 2^2) \cdot 26 - 5^2] : 3^2 =$   
c)  $\{[(13^2 + 3) : 2 - 5] : 9 + 4^2\} : (625 : 25) =$

4). Calculați :

- a).  $2^4 \cdot 2^3 =$     b).  $3^8 \cdot 3^9 =$     c).  $5^{10} \cdot 5^{21} =$     d).  $2^6 \cdot 4^2 =$     e).  $3^9 \cdot 9^7 =$     f).  $8^{16} \cdot 16^5 =$

5). Efectuați :

- a).  $5^{17} : 5^9 =$     b).  $3^{21} : 3^{18} =$     c).  $2^{34} : 2^{30} =$     d).  $4^{15} : 2^{26} =$     e).  $25^8 : 125^5 =$     f).  $16^9 : 8^{12} =$

6). Efectuați :

- a).  $(2^3)^8 =$     b).  $(3^6)^9 =$     c).  $(2 \cdot 3^2)^7 =$     d).  $(5^3 \cdot 2^7)^5 =$     e).  $2^8 \cdot 3^8 =$     f).  $4^9 \cdot 3^{18} =$

7). Efectuați :

- a).  $(2^4 - 4^2)^{100} =$     b).  $(5^7 : 25^2 - 11^2)^{10} : 8^6$   
c).  $(1^{100} - 100^0 + 3^{100}) : 9^{7^2} =$     d).  $(16^4 \cdot 8^5 : 4^{15} + 2^0 + 2^2) \cdot 4 - 5^2 =$   
e).  $(1^0 + 1^1 + 1^2 + 1^3 + \dots + 1^{102})^5 : 103^3 =$     f).  $(3^{15} + 9^7) : 3^{14} =$   
g).  $(5^{12} + 25^6 + 125^4) : 5^{11} =$     h).  $(2^{27} : 4^5 + 25^4 \cdot 2) : (4^7 + 5^8) =$

8). Aflați x număr natural :

- a).  $[(x : 7 + 107) : 2 \cdot 10 - 106] : 4 = 116$     b).  $(x - 1475) : 25 \cdot 103 + 8008 : 143 - 71 = 10800$   
c).  $[(a + 1881 : 9) \cdot 81 + 18] \cdot 9 = 17631 \cdot 12$     d).  $[(940 : x) \cdot 2 + (3700 - 1900) : 100] : 2 = 103$   
e).  $12x + 13x + x37 + 4x2 = 1249$     f).  $128 \cdot 6 : (282 - x) = 192$   
g).  $(x : 4 \cdot 3 - 20) : 7 = 10$

### Divizor, multiplu

1). Scrieți elementele mulțimilor :

- a). divizorii lui 12;    c). divizorii lui 28;    1). divizorii proprii ai numărului 24  
b). divizorii lui 32;    e). divizorii lui 19;    f). divizorii improprii pentru numărul 15

2). Scrieți cei mai mici 8 multiplii pentru : a). 3;    b). 7;    c). 5;    d). 8;    e). 11

3). Scrieți semnul corect ( : sau | ) între următoarele numere :

- a).  $6 \square 2$     b).  $3 \square 9$     c).  $0 \square 7$     d).  $1 \square 7$     e).  $18 \square 9$   
f).  $16 \square 1$     g).  $16 \square 0$     h).  $169 \square 13$     i).  $8 \square 16$     j).  $17 \square 17$

4). Scrieți elementele mulțimilor:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 12 \mid x\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 10, x : 2\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \mid 24 \text{ și } x \mid 30\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{N} \mid x : 3 \text{ și } 30 : x\}$$

$$E = \{x \in \mathbb{N} \mid 2 \mid x \text{ și } x \mid 28\}$$

$$F = \{x \in \mathbb{N} \mid x \mid 24 \text{ și } x \nmid 2\}$$

5). Determinați elementele mulțimilor:

$$a). D_{30} \cap M_4$$

$$b). D_{48} \cap D_{60}$$

$$c). M_{30} \cap D_{60}$$

$$d). (D_{15} \cup D_{12}) \cap D_{20}$$

$$6). \text{Calculați: } a). D_{16} - M_5$$

$$b). D_{24} - D_{16}$$

$$c). D_{30} - (M_5 \cap M_2)$$

7). Scrieți 3 divizori comuni pentru:

$$a). 48 \text{ și } 36$$

$$b). 30 \text{ și } 40$$

8). Scrieți 3 multipli comuni pentru:

$$a). 3 \text{ și } 5$$

$$b). 2 \text{ și } 7$$

$$c). 6 \text{ și } 4$$

$$d). 9 \text{ și } 6$$

$$e). 9 \text{ și } 2$$

$$f). 3 \text{ și } 4$$

9). Scrieți elementele mulțimii:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 30, x : 2 \text{ dar } x \nmid 3\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 30 : x \text{ și } x \nmid 2\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid x \mid 24 \text{ și } x \nmid 4\}$$

10). Fie mulțimea  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 200\}$ . Aflați:

a). câte elemente din A se divid cu 2;

b). câte elemente din A se divid cu 5

c). câte elemente din A se divid cu 10

d). câte elemente din A se divid cu 2 dar nu se divid cu 5.

11). Scrieți elementele mulțimilor:

$$A = \{x \in \mathbb{N} \mid 24 : (x + 1)\}$$

$$B = \{x \in \mathbb{N} \mid 15 : (2x + 1)\}$$

$$C = \{x \in \mathbb{N} \mid (2x - 1) \mid 36\}$$

$$D = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 20, (x + 1) : 3\}$$

$$E = \{x \in \mathbb{N} \mid x < 40, (2x + 3) : 5\}$$

$$F = \{x \in \mathbb{N} \mid 7 \mid (x - 3), x < 30\}$$

12). Scrieți cel mai mic și cel mai mare divizor propriu pentru:

$$a). 2^{20}$$

$$b). 3^{40}$$

$$c). 5^{100}$$

$$d). 2^8 - 3^9$$

$$e). 3^{17} \cdot 5^9$$

$$f). 10^{30}$$

13). Arătați că:

$$a). (5a^2 + a^1 + 5a) : 7, \text{ oricare a cifra}$$

$$b). (3^{40} \cdot 2 + 5 \cdot 3^{41}) : 51$$

$$c). (7^{n+2} - 7^{n+1} \cdot 5 + 7^n \cdot 4) : 9 \text{ oricare } n \in \mathbb{N}$$

$$d). (6^n \cdot 2^{n+1} + 12^{n+1} + 4^n \cdot 3^{n+2}) : 23 \text{ oricare } n \in \mathbb{N}$$

14). Arătați că:

$$a). (7^0 + 7^1 + 7^2 + \dots + 7^{99}) : 8 \quad b). (7 + 7^2 + \dots + 7^{99}) : 57 \quad c). (2 + 2^2 + \dots + 2^{84}) : 105$$

15). Să se arate că:

$$a). (2^n + 2^{n+1}) \text{ se divide cu } 3, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}$$

$$b). (2 \cdot 3^n + 3^{n+1} + 2 \cdot 3^{n+2}) \text{ se divide cu } 23, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}$$

$$c). (4^n + 2^{2n+2} + 4^{n+1}) \text{ se divide cu } 3, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}$$

$$d). (5^n + 3 \cdot 5^{n+2} - 2 \cdot 5^{n+1}) \text{ se divide cu } 11, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}$$

$$e). (2^{2n+1} + 3 \cdot 4^n) \text{ se divide cu } 10, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*$$

$$f). (2^{n+1} \cdot 5^n + 2^n \cdot 5^{n+2}) \text{ se divide cu } 90, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}^*$$

$$g). (2^{3n+1} \cdot 3^{n+1} + 8^n \cdot 3^{n+3} + 4^n \cdot 6^{n+1}) \text{ se divide cu } 13, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}$$

$$h). (2^n \cdot 15^{n+1} + 6^n \cdot 5^{n+2} - 10^n \cdot 3^{n+2}) \text{ se divide cu } 31, \text{ pentru orice } n \in \mathbb{N}$$

16). Să se arate că:

$$a). \overline{aba} \text{ se divide cu } 11 \text{ știind că } b = 2a$$

$$b). \overline{abc} - \overline{cba} \text{ se divide cu } 11$$

$$c). \overline{abc} + \overline{bca} \text{ se divide cu } 112, \text{ știind că } a = 10b + c$$

$$d). \overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} \text{ se divide cu } 111$$

17). Aflați  $x \in \mathbb{N}$  știind că:

$$a). (2x - 3) \mid 9$$

$$b). (4x + 1) \mid 20$$

$$c). 33 : (x - 1)$$

$$d). 12 : (x + 2)$$

$$e). \frac{18}{2x + 1} \in \mathbb{N}$$

$$f). \frac{22}{x - 2} \in \mathbb{N}$$

$$g). \frac{x - 3}{5} \in \mathbb{N}$$

$$h). \frac{4x + 1}{3} \in \mathbb{N}$$



## Criterii de divizibilitate

**\*\***

1). Fie mulțimea  $A = \{45; 51; 60; 72; 75; 87; 96; 112; 115; 120; 126\}$ . Determinați elementele mulțimilor: a).  $B = \{x \in A \mid x : 2\}$  b).  $C = \{x \in A \mid x : 3\}$

c).  $D = \{x \in A \mid 4 \mid x\}$  d).  $E = \{x \in A \mid x : 5\}$  e).  $F = \{x \in A \mid x : 9\}$

f).  $G = \{x \in A \mid x : 25\}$  g).  $H = \{x \in A \mid x : 3 \text{ și } x : 4\}$  h).  $M = \{x \in A \mid x : 2 \text{ și } 3 \nmid x\}$

2). Care din numerele următoare se divid cu 3 și care cu 9 :

126; 252; 720; 431; 117; 225;  $3 \cdot 5^2$ ;  $6 \cdot 27$

3). a). Toate numerele care se divid cu 3 se divid și cu 9 ?

b). Dați exemple de numere pare divizibile cu 3 și care nu se divid cu 9.

c). Dați exemple de numere pare divizibile cu 9.

d). Găsiți numere impare divizibile cu 3 și să nu se dividă cu 9.

4). Aflați  $x \in \mathbb{N}$  dacă : a).  $\overline{3x} : 5$  b).  $\overline{1x2} : 3$  c).  $\overline{37x} : 2$  d).  $\overline{15x} : 4$  e).  $9 \mid \overline{2x1}$

5). Aflați  $x \in \mathbb{N}$  dacă : a).  $2 \mid \overline{4xx}$  b).  $4 \mid \overline{3xx}$  c).  $5 \mid \overline{x3x}$  d).  $\overline{x36} : 9$  e).  $25 \mid \overline{1xx}$

6). Să se determine elementele mulțimilor :  $A = \{x \mid x \in \mathbb{N}, \overline{2x3} : 3\}$  ;  $B = \{y \mid y \in \mathbb{N}^*, \overline{2y4y} : 6\}$

7). Aflați  $x \in \mathbb{N}$  dacă  $\overline{52x}$  :

a). se divide cu 2 și cu 3

b). se divide cu 2, dar nu se divide cu 3

c). se divide cu 5 și nu se divide cu 2

d). se divide cu 2, dar nu se divide cu 9

8). Aflați numerele de forma  $\overline{1x2y}$  care se divid :

a). cu 2 și cu 3

b). cu 3 și cu 4

c). cu 2 și cu 9

d). cu 5 și cu 9

e). cu 3 și cu 5

f). cu 4 și cu 5

9). Aflați : a). cel mai mic număr de 3 cifre divizibil cu 2

b). cel mai mare număr de 2 cifre distincte divizibil cu 3

c). cel mai mic număr de 3 cifre divizibil cu 5

d). cel mai mic număr de 3 cifre divizibil cu 3 și 5

e). cel mai mare număr de 3 cifre divizibil cu 3 și 5

f). cel mai mic număr de 3 cifre par divizibil cu 9

10). Arătați că numărul  $(\overline{2a3} + \overline{a12} + \overline{1a}) : 3$ .

11). Arătați că  $(5^n \cdot 2^n + 8) : 3$ , oricare  $n \in \mathbb{N}$

12). Aflați câte numere de forma  $\overline{7x3y}$  se divid cu : a). 4 b). 2 c). 5 d). 10

13). Arătați că : a).  $(2^{n+1} \cdot 5^n + 1) : 3$  oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}$

b).  $(5^{n+1} \cdot 2^n + 1) : 3$  oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}$

14). Demonstrați că : a).  $(3^{93} - 7^{23}) : 2$  b).  $(3^{91} - 2^{41}) : 5$

15). Demonstrați că : a).  $n(n+5) : 2$  b).  $n(3n+7) : 2$

c).  $(n-1)(n+3) : 2$  d).  $(3n-1)(n+4) : 2$  oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}$

## Proprietăți ale relației de divizibilitate

1). Aflați valoarea de adevăr pentru următoarele propoziții :

- a). „dacă  $3 \mid a \Rightarrow 9 \mid a$ ”      b). „dacă  $9 \mid a \Rightarrow 3 \mid a$ ”      c). „dacă  $4 \mid a \Rightarrow a : 2$ ”  
 c). „dacă  $3 \mid a \Rightarrow 9 \mid a$ ”      d). „dacă  $a : 6 \Rightarrow a : 3$ ”      e). „dacă  $3 \mid a \Rightarrow 3 \mid 7a$ ”  
 f). „dacă  $2 \mid a$  și  $2 \mid b \Rightarrow 2 \mid 3a + b$ ”      g). „dacă  $2 \mid a + b \Rightarrow 2 \mid 3a + 3b$ ”

2). a). Știind că  $3 \mid 12$  și  $12 \mid 36$ , ce relație există între 3 și 36 ?

- b). Dacă știm  $n \mid a$  și  $n \mid ab$ , este necesar ca  $n \mid b$  ?  
 c). Este adevărat că dacă  $n \mid (a - b)$  atunci  $n \mid a$  și  $n \mid b$  ?  
 d). Dacă un număr natural divide suma a două numere naturale atunci el divide pe fiecare termen al sumei. Indicație : pentru c și d căutați exemple și contraexemplu.

3). Fără a efectua calculele, hotărâți care propoziții sunt adevărate și care nu : a). „ $5 \mid 20 \cdot 31$ ”  
 exemplu : adevărat pentru că  $5 \mid 20 \Rightarrow 5$  divide orice multiplu al lui  $20 \Rightarrow 5 \mid 20 \cdot 31$

- b). „ $6 \mid 24 \cdot 58$ ”      c). „ $2 \mid 8 \cdot 9$ ”      d). „ $2 \mid 9 \cdot 7$ ”      e). „ $3 \mid 12 \cdot 17 \cdot 10$ ”  
 f). „ $3 \mid 54 \cdot 7$ ”      g). „ $2 \mid (400 + 36)$ ”      h). „ $3 \mid (400 + 36)$ ”      i). „ $5 \mid (400 + 36)$ ”  
 j). „ $2 \mid (600 + 303)$ ”      k). „ $3 \mid (600 + 303 + 24)$ ”      l). „ $2 \mid (17 + 4 + 36)$ ”  
 m). „ $2 \mid (29 \cdot 10 + 42)$ ”      n). „ $5 \mid (14 \cdot 15 + 20)$ ”      o). „ $3 \mid (12 \cdot 25 + 4)$ ”  
 p). „ $2 \mid (300 \cdot 12 - 630)$ ”      r). „ $3 \mid (300 \cdot 4 + 15 - 22)$ ”      s). „ $10 \mid (540 + 30 \cdot 43)$ ”

4). Demonstrați că : a). dacă  $3 \mid a + 6 \Rightarrow 3 \mid a$       b). dacă  $2 \mid a + 4 \Rightarrow 2 \mid a$   
 c). dacă  $5 \mid a + 20 \Rightarrow 5 \mid a$       d).  $7 \mid a + 14b + 21 \Rightarrow 7 \mid a$       e).  $9 \mid a + 18b + 9c \Rightarrow 9 \mid a$

5). Demonstrați că : a). dacă  $3 \mid a + 2b \Rightarrow 3 \mid 2a + b$   
 b). dacă  $7 \mid 2a + b \Rightarrow 7 \mid 5a + 6b$       c). dacă  $11 \mid 8a + 2b \Rightarrow 11 \mid 3a + 9b$

6). Fie un număr  $a$  care se divide cu 12. Arătați că  $a$  are cel puțin 6 divizori.

7). Aflați numărul natural  $x$  dacă : a).  $x \mid x + 8$       b).  $x \mid 3x + 11$       c).  $x \mid 4x - 7$

8). Există numere  $a$  naturale astfel încât :

- a).  $a : 4$  și  $a \mid 211$       b).  $3 \mid a$  și  $a \mid 173$       c).  $a : 6$  și  $a \mid 363$  ?

9). Găsiți valoarea de adevăr pentru propozițiile :

- a).  $D_4 \subset D_8$       b).  $D_{15} \subset D_{30}$       c).  $D_3 \subset D_9 \subset D_{36}$       d).  $D_{30} \subset D_6$

10). Stabiliți valoarea de adevăr :

- a).  $M_8 \subset M_4$       b).  $M_9 \subset M_3$       c).  $M_{20} \subset M_5$       d).  $M_4 \subset M_2$       e).  $M_{12} \subset M_3 \cap M_6$

11). Dacă  $2a + 3b = 6c$ , să se arate că :

- a).  $a : 3$       b).  $b : 2$       c). dacă, în plus,  $b : 5$ , arătați că  $(3c - a) : 15$

12). Știind că  $(2a + 3b) : 7$ , arătați că :

- a).  $(5a + 4b) : 7$       b).  $(8a + 12b) : 7$       c).  $(a + 5b) : 7$       d).  $(3a + b) : 7$

13). Aflați  $x \in \mathbb{N}$  dacă :

- a).  $\frac{x+9}{x-1} \in \mathbb{N}$       b).  $\frac{x+7}{x} \in \mathbb{N}$       c).  $\frac{2x+3}{x+1} \in \mathbb{N}$   
 d).  $\frac{3x-4}{x-2} \in \mathbb{N}$       e).  $\frac{3x+4}{4x-1} \in \mathbb{N}$       f).  $\frac{4x+3}{3x-1} \in \mathbb{N}$

14). Să se arate că următoarele fracții sunt ireductibile oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}$  :

- a).  $\frac{3n+1}{3n+2}$  ; b).  $\frac{2n}{2n+1}$  ; c).  $\frac{4n+3}{4n+2}$  ; d).  $\frac{4n+3}{2n+1}$  ; e).  $\frac{3n}{6n+1}$  ; f).  $\frac{8n+7}{4n+3}$  ; g).  $\frac{4n+3}{5n+4}$  ; h).  $\frac{2n+1}{5n+3}$



**Indicație :** dacă  $\frac{3n+1}{3n+2}$  nu este ireductibilă  $\Rightarrow$  se poate simplifica cu un număr natural. Să notăm cu  $a$  acel număr natural  $\Rightarrow a|(3n+1)$  și  $a|(3n+2)$ . Conform proprietăților divizibilității  $\Rightarrow a|[(3n+2)-(3n+1)]$   
 $\Rightarrow a|1 \Rightarrow a=1$ . Dar o fracție care se simplifică numai cu 1 este ireductibilă.

## Numere prime, numere compuse

- 1). Să se precizeze care din următoarele numere sunt prime și pentru cele compuse să se găsească divizorii proprii și cei improprii : a).59; b).95; c).123; d).115; e).1243; f).1921; g).1309
- 2). Media aritmetică a trei numere este 17, iar unul dintre numere este număr prim cuprins între 20 și 28. Să se afle media aritmetică a celorlalte 2 numere.
- 3). Găsiți numere prime de forma : a).  $\overline{2x}$       b).  $\overline{5x}$
- 4). Găsiți numere prime de forma : a).  $\overline{x1}$       b).  $\overline{x3}$       c).  $\overline{x7}$
- 5). Găsiți numere compuse de forma : a).  $\overline{9x}$       b).  $\overline{x9}$
- 6). Suma dintre un număr prim și un număr par este 576. Aflați numerele.
- 7). Diferența dintre un număr impar și un număr prim este 177. Aflați numerele.
- 8). Produsul a două numere prime este 202. Aflați numerele.
- 9). Aflați  $x \in \mathbb{N}$  dacă :  
 a).  $x \cdot (x+2)$  este număr prim  
 b).  $x \cdot (x-4)$  este număr prim      c).  $x^2 + 10x$  este număr prim
- 10). Scrieți elementele mulțimii  $D_p$  unde  $p$  este număr prim.
- 11). Demonstrați că următoarele numere nu sunt prime, oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}$  :  
 a).  $x = n^2 + 3n$       b).  $y = 2^n \cdot 3^{n+1} + 10^n$       c).  $2^n : 3^n - 1$
- 12). Aflați  $n \in \mathbb{N}$  pentru care numărul  $6n + 41$  nu este prim.
- 13). Aflați  $n \in \mathbb{N}$  pentru care următoarele numere sunt prime : a).  $6^n + 2$ ; b).  $n^2 + n$
- 14). Aflați  $a, b, c$  prime dacă  $3a + 2b + 4c = 18$ .
- 15). Să se afle cele mai mici numere naturale prime care îndeplinesc condiția :  
 a).  $a + 3b + 9c = 111$       b).  $a + 5b + 35c = 145$       c).  $a + 5b + 10c = 145$

## Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime

- 1). Descompuneți în factori primi : a). 24      b). 32      c). 20      d). 35      e). 26      f). 30  
 g). 45      h). 36      i). 40      j). 42      k). 28      l). 38      m). 48      n). 50      o). 49
- 2). Descompuneți în factori primi : a). 39      b). 63      c). 51      d). 56      e). 63      f). 57  
 g). 65      h). 68      i). 70      j). 78      k). 69      l). 72      m). 87      n). 81
- 3). Descompuneți în factori primi : a). 95      b). 91      c). 90      d). 96      e). 102      f). 105  
 g). 108      h). 121      i). 128      j). 117      k). 132      l). 143      m). 169      n). 133      o). 153  
 p). 147      r). 161      s). 273      t). 171
- 4). Descompuneți în factori primi : a). 250      b). 225      c). 192      d). 288      e). 384      f). 360  
 g). 432      h). 324      i). 576      j). 441      k). 484      l). 676      m). 375      n). 625      o). 1001

- 5). Știind că  $10 = 2 \cdot 5$ ,  $100 = 2^2 \cdot 5^2$ ,  $1000 = 2^3 \cdot 5^3$ , descompuneți în factori primi :  
 a). 900 b). 400 c). 1600 d). 500 e). 1200 f). 350 g). 800 h). 2400 i). 14400 j). 4900  
 6). Scrieți numerele următoare ca produs de numere consecutive : a). 20 b). 30 c). 90  
 d). 132 e). 210 f). 240 g). 380 h). 420 i). 272 j). 702 k). 600 l). 870  
 7). Aflați  $x, y \in \mathbb{N}$  dacă  $x^2(y + 2) = 192$ .  
 8). Aflați  $x, y \in \mathbb{N}$  dacă  $x^2(2y + 1) = 180$ .

## Divizori comuni, c.m.m.d.c., numere prime între ele

\*

1). Știind că dacă unul dintre numere este divizor pentru celelalte el este c.m.m.d.c. pentru toate, să se calculeze : a). (6, 18, 12)

Exemplu :  $6 \mid 18, 6 \mid 12 \Rightarrow 6$  este c.m.m.d.c. pentru 6, 18, 12

b). (8, 4, 12); c). (36, 24, 12); d). (45, 72, 9); e). (30, 36, 6); f). (5, 10, 15); g). (120, 5, 40)  
 atenție : vrem (12, 20, 4, 18),  $4 \mid 12, 4 \mid 20$ , dar  $4 \nmid 18 \Rightarrow 4$  nu este c.m.m.d.c. pentru 12, 20, 4, 18  
 h). (120, 108, 6, 28) i). (72, 84, 12, 54)

2). Știind că dacă numerele sunt prime între ele  $\Rightarrow$  c.m.m.d.c. = 1, c.m.m.m.c. = produsul lor, calculați : a). (2, 9); b). (18, 25); c). (2, 3, 5); d). (9, 4, 5)

3). Calculați c.m.m.d.c. :

a).  $A = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^7 \cdot 11^4$  și  $B = 2 \cdot 5^2 \cdot 7^8 \cdot 11$  b). 90 și 168  
 c). 100, 280 și 980 d). 875 și 550 e). 16, 48, 64 și 72 f). 50, 75 și 120  
 g). 112, 28 și 98 h). 144 și 192 i). 3024, 1350 și 360 j). 392, 252 și 560  
 k). 1944, 729 și 2835 l). 594, 4851 și 7260

4). Să se scrie toate perechile de numere prime între ele care se pot forma cu numerele :  
 a). 12, 36, 81, 250, 121, 9 b). 14, 49, 27, 32

5). Să se afle elementele mulțimii :  $A = \{x \in \mathbb{N}^* \mid (x, 15) = 1, x < 7\}$ .

6). a). Pot fi două numere prime între ele dacă primul este multiplu de 6 și al doilea este multiplu de 9? Justificați.

b). Există a număr natural, multiplu de 4 astfel încât  $(12, a) = 1$ ? De ce?

7). Aflați 2 numere prime între ele care au produsul egal cu : a). 48; b). 70; c). 102.

8). Formați perechi de numere compuse, dar prime între ele, numai cu cifrele 3, 2, 1.

\*\*

9). Să se scrie toate numerele naturale de forma :

a).  $\overline{21x} : 2$  b).  $\overline{4y3} : 3$  c).  $\overline{34xy} : 30$  d).  $\overline{72y} : 5$  e).  $\overline{435y} : 6$  f).  $\overline{2x3x} : 6$   
 g).  $\overline{x3y} : 15$  h).  $\overline{42x3y} : 15$  i).  $15 \mid \overline{5x3y}$  j).  $\overline{42xy} : 15$  și  $\overline{42xy}$  nu se divide cu 2

10). Aflați cifra  $x$  astfel încât perechile următoare să fie numere prime între ele :

a).  $\overline{24}$  și  $\overline{2x}$ ; b).  $\overline{1x}$  și 18; c). 30 și  $\overline{4x}$ ; d).  $\overline{4x}$  și  $\overline{x4}$ ;

e).  $\overline{2x}$  și  $\overline{x6}$ ; f).  $\overline{12x}$  și 24; g). 1125 și  $\overline{401x}$

11). Să se găsească toate numerele de forma :  $(x, y, z \text{ cifre})$

a).  $\overline{435y}$  divizibile cu 6 b).  $\overline{12xy}$  divizibile cu 18 c).  $\overline{6x5y}$  divizibile cu 45  
 d).  $\overline{68x}$  divizibile cu 12 e).  $\overline{4x1y}$  divizibile cu 12 f).  $\overline{x3y}$  divizibile cu 15  
 g).  $\overline{24x0}$  divizibile cu 20 h).  $\overline{x42y}$  divizibile cu 36 i).  $\overline{x2y}$  divizibile cu 75  
 j).  $\overline{87xz}$  divizibile cu 50



- 12). Aflați  $n \in \mathbb{N}$  pentru care numărul  $6n + 41$  nu este prim.
- 13). Aflați c.m.m.d.c. pentru cel mai mare număr de forma  $\overline{1ab} : 12$  și cel mai mic număr de forma  $\overline{a0b} : 18$ .
- 14). Să se determine toate numerele de forma :
- a).  $42x3y : 15$     b).  $18 | \overline{x5y}$     c).  $2xy : 45$     d).  $\overline{xy} : 12$     e).  $15 | \overline{5x3y}$     f).  $12 | \overline{5x3y}$
- 15). a). Care este cel mai mare număr natural de 3 cifre divizibil cu 18 ?  
 b). Dar cel mai mic număr natural de 4 cifre divizibil cu 75 ?  
 c). Care este cel mai mic număr natural de 3 cifre divizibil cu 12 ?  
 d). Care este cel mai mare număr natural de 3 cifre divizibil cu 15 ?
- 16). Să se găsească cel mai mare număr natural astfel încât 245 și 296 împărțite la acest număr natural dau resturile 5 respectiv 8.
- 17). Știind că numerele 1092, 1792 și 1619 împărțite prin același număr natural dau resturile 12, 28 și respectiv 35, să se afle numărul prin care se împart.
- 18). Să se afle toate numerele naturale  $x$  astfel încât 297 și 319 împărțite la același număr  $x$  să dea resturile 9 respectiv 7.
- 19). Numerele 127, 514 și 1584 împărțite la același număr natural dau resturile 7, 10 și 0. Să se afle împărțitorul. Găsiți toate soluțiile.
- 20). Știind că 1372, 1316 și 1575 împărțite la același număr natural dau resturile 8, 14 și 25 să se afle împărțitorul. Găsiți toate soluțiile.
- 21). La serbarea de sfârșit de an s-au dat pachetele conținând dulciuri. Fiecare pachet are același număr de ciocolate, bomboane și napolitană. Câte pachete s-au dat dacă din 282 ciocolate rămân 2, din 715 bomboane rămân 15 și din 424 napolitane rămân 4 ? (Aflați numărul maxim de pachete.)
- 22). a). Dacă produsul a două numere naturale este 345, care sunt numerele ? Câte soluții are problema ?  
 b). Aflați două numere naturale prime între ele dacă produsul lor este 56.  
 c). Aflați două numere naturale dacă produsul lor este 48 și c.m.m.d.c. este 4.
- 23). Să se afle două numere naturale știind că suma lor este 168 și c.m.m.d.c. al lor este 24.
- 24). a). Să se afle două numere naturale dacă produsul este 48 și c.m.m.d.c. lor este 2.  
 b). Să se afle trei numere naturale care au produsul 96 și c.m.m.d.c. lor este 2.
- 25). Produsul a două numere naturale este 576 și c.m.m.d.c. este 12. Să se afle numerele.
- 26). Media aritmetică a două numere este 24, iar cel mai mare divizor comun al lor este 4. Să se afle numerele.
- 27). O persoană a cumpărat 2 cutii de bomboane cu 25 respectiv 34 bomboane. Să se afle câți copii are persoana dacă împărțind cele 2 cutii pe rând, în mod egal copiilor, rămâne de fiecare dată o bomboană.
- 28). Numerele 1812, 355 și 2541 împărțite la același număr natural dau resturile 12, 19 respectiv 21.
- 29). Să se afle  $x$  cifră astfel încât numerele naturale de forma  $\overline{4x}$  și c.m.m.d.c. numerelor 132 și 378 să fie prime între ele.
- 30). Aflați cifra  $x$  dacă :
- a).  $(\overline{23x} ; 4) = 2$     b).  $(\overline{15x} ; 25) = 5$     c).  $(\overline{38x} ; 4) = 1$     d).  $(\overline{1x21} ; 9) = 1$     e).  $(\overline{24x} ; 24) = 1$
- 31). Demonstrați că : a).  $(4n + 6 ; 6n + 8) \neq 1$     b).  $(4n + 3 ; 3n + 1) \neq 1$ .

32). Un număr de 144 de fete și 120 de băieți se împart în grupe care au același de băieți și același număr de fete. a). Arătați că se pot forma 12 grupe. b). Arătați că nu se pot forma 15 grupe. c). Găsiți numărul maxim și numărul minim de grupe ce se pot forma.

### Multipli comuni, c.m.m.m.c.

\*

1). Știind că dacă unul dintre numere este multiplu pentru celelalte numere el este c.m.m.m.c. pentru toate să se calculeze : a). [120, 40, 5]

Exemplu :  $120 : 40, 120 : 5 \Rightarrow 120$  este c.m.m.m.c. pentru 120, 40, 5

b). [45, 9, 5, 15] c). [8, 12, 3, 24] d). [9, 2, 3, 4, 36] e). [48, 2, 6, 16]

f). [21, 14, 42] g). [18, 24, 72] h). [3, 4, 6, 27, 36, 108]

atenție: vrem [5, 10, 8, 4, 20] dar observăm că :  $20 : 5, 20 : 10, 20 : 4$  dar  $20 : 8 \Rightarrow 20$  nu este c.m.m.m.c. pentru 5, 10, 8, 4, și  $20 \Rightarrow [5, 8, 10, 4, 20] = 40$

i). [12, 18, 24, 36] j). [12, 18, 24, 48] k). [15, 20, 25, 60]

2). Știind că : dacă numerele sunt prime între ele  $\Rightarrow$  c.m.m.d.c. = 1, c.m.m.m.c. = produsul lor, calculați : a). [2, 9]; b). [18, 25]; c). [2, 3, 5]; d). [9, 4, 5]

3). Calculați c.m.m.m.c. pentru :

a).  $A = 2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$  și  $B = 2 \cdot 3 \cdot 5^2$  b).  $A = 3^2 \cdot 7 \cdot 11$  și  $B = 2 \cdot 3 \cdot 11$

c). 6, 12 și 18 d). 24, 36 și 18 e). 36, 9, 6 și 54 f). 14, 5 și 35

g). 45, 75 și 27 h). 8, 14 și 28 i). 20, 15 și 12 j). 140 și 60

k). 220, 3025 și 150 l). 288, 648 și 1080 m). 784, 504 și 980

4). Să se afle c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. pentru numerele : a). 180, 847, 231; b). 3600, 4500, 320, 240

5). Să se calculeze c.m.m.m.c. și c.m.m.d.c. pentru :

a) 120; 100 și 280; b) 42; 105 și 147; c) 196; 1620 și 1008; d) 22; 75 și 150.

\*\*

6). Se dau numerele :  $A = [2^2 \cdot 2^3 - 2^2 \cdot (5 - 4)] : 2^2 + (2^3 + 2)^2 : 5$  și  $B = 6 + 2 \cdot [(2 + 2^2 \cdot 3) - 1]$ . Calculați [A, B] și (A, B).

7). Calculați : a).  $(12, 28, 26) \cdot [18, 24] =$ ;

b).  $(A, B) \cdot [4, 6] =$  unde :  $A = (60, 200)$  și  $B = [32, 80]$ .

8). Aflați c.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. pentru cel mai mare număr natural care împărțit la 7 dă câtul 6 și cel mai mic număr natural care împărțit la 9 dă câtul 4.

9). Se dau numerele :  $A = [(2^5 \cdot 3^5 : 36 - 2^6 : 2^3) - 5^2] : 3$  și  $B = (12 - 3 \cdot 2^0) \cdot 10$

Să se afle (A, B) și [A, B].

10). Să se găsească cel mai mic număr natural care împărțit la 5 și la 7 dă restul 1 de fiecare dată și câțuri nenule.

11). Să se afle numărul natural mai mic ca 400 care împărțit la 18, la 72 și la 60 se obține restul 15 de fiecare dată și câțuri nenule.

12). Să se determine toate numerele mai mici ca 300 care împărțite la 5, la 6, și la 8 dau restul 3 la fiecare împărțire și câțuri nenule.

13). Să se determine toate numerele mai mici ca 1000 care împărțite la 24, la 18 și la 20 dau de fiecare dată rest 9 și câțuri nenule.



- 14). Doi copii plantează puieți pe cele două laturi ale unei alei. Unul îi plantează din 3 în 3 m, celălalt din 5 în 5 m. Știind că au început din același loc, peste câți metri vor fi amândoi în același loc pentru prima dată și de câte ori se vor mai întâlni în 100 m ?
- 15). Care este numărul de elevi dintr-o clasă știind că pot fi împărțiți exact în grupe de câte 2, 3 sau 5 elevi ?
- 16). Un muncitor grupând piesele executate câte 2, câte 3, câte 4 și câte 5 îi rămân de fiecare dată una rest. Câte piese a executat muncitorul știind că norma sa este sub 64 de piese?
- 17). Știind că un număr natural se împarte la 3, 8, 11 și dă resturile 2, 7 și 10 să se afle numărul dacă e mai mic decât 300.
- 18). Să se afle cel mai mic număr natural care se împarte la 8, 5 și 3 și dă respectiv resturile 6, 3 și 1.
- 19). Aflați a și b numere naturale dacă se cunosc :
- a).  $(a; b) = 8$  și  $[a; b] = 96$                       b).  $(a; b) = 7$  și  $[a; b] = 210$
- 20). Produsul a două numere naturale este 450 iar c.m.m.m.c. este 90. Să se afle numerele.
- 21). Să se afle numărul de elevi dintr-o clasă dacă așezați câte 4 sau câte 6 în bancă se formează grupe complete și puși câte 5 în bancă rămân 4 elevi.
- 22). Aflați numerele naturale mai mici ca 100 dacă împărțite la 5, 6, 10 dau mereu restul 2.
- 23). Arătați că pentru  $a = 7n + 3$  și  $b = 5n + 2$  avem  $[a; b] = a \cdot b$ , oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}$ .
- 24). Aflați cantitatea minimă de bomboane care se poate împărți în cutii de câte 30 bomboane, rămânând 13 bomboane iar dacă se împarte în cutii de câte 24 bomboane, mai rămân 7 bomboane.
- 25). Aflați numărul de garoafe dintr-o florărie știind că este cuprins între 600 și 650 și dacă faci buchete de câte 5 flori sau de câte 7 flori rămân de fiecare dată 4 flori.
- 26). Pe o stradă se află stâlpi de iluminat din 20 m în 20 m și stâlpi pentru susținerea firelor de troleibuz din 15 m în 15 m. Dacă strada are lungimea de 1,1 km și primii stâlpi sunt în același punct, de câte ori mai coincid stâlpii ?

## Testul 1

- ③1p 1). Dacă  $\overline{4x7} : 3 \Rightarrow x \in \dots\dots$
- ③1p 2).  $D_6 \cap M_2 = \dots\dots$
- ③1p 3). Cel mai mic număr natural care se împarte exact la 15; 20 și 18 este .....
- ③1p 4). Aflați c.m.m.d.c. al numerelor  $\overline{72}$ ;  $\overline{48}$  și 56.
- ⑦1p 5). Cel mai mic număr de forma  $\overline{57xy}$  care se divide cu 15 este .....
- ⑦1p 6).  $[180; 144] - (2100; 1400) = \dots\dots$
- ⑩1p 7). Să se afle perechile de numere prime între ele care au c.m.m.m.c. al lor 36.
- ⑨2p 8). Dacă  $a + 3b = 9$  unde a este număr prim atunci b = .....

## Testul 2

- ③1p 1). Să se scrie o pereche de numere prime între ele.
- ③1p 2). Dacă  $3 \mid 2x3x$ , atunci  $x = \dots\dots$
- ③1p 3). C.m.m.d.c. al numerelor 132; 363 și 726 este .....
- ③1p 4). C.m.m.m.c. al numerelor 120; 300 și 350 este .....
- ⑨1p 5). Să se stabilească dacă numărul a este număr prim :  
 $a = 408 : [2 \cdot 3^2 + (2^5)^2 : 8^6 + 1^3 + 27^{13} : 3^{39}]$
- ⑦2p 6). Să se afle mulțimile : a).  $D_{30} - D_{18}$ ; b).  $D_{40} \cap D_{60}$ .
- ⑨1p 7). Fiind dat numărul  $a = 5 \cdot (3x + 1) - 8x$ , să se precizeze pentru care număr x prim, a este număr impar.
- ⑩1p 8). Să se arate că  $3^{n+1} - 3^n + 3^{n+2}$  este multiplu de 11, oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}$ .

# Capitolul III

## NUMERE RAȚIONALE POZITIVE

### Frații ireductibile, noțiunea de număr rațional

1). Reprezentați pe axa numerelor :

a).  $\frac{22}{4}; \frac{26}{6}; \frac{27}{8}; \frac{24}{4}; \frac{12}{2}; \frac{11}{2}; \frac{13}{3}$     b).  $\frac{4}{1}; \frac{36}{9}; \frac{38}{8}; \frac{32}{24}; \frac{76}{16}; \frac{20}{15}; \frac{19}{4}$     c).  $\frac{60}{25}; \frac{15}{20}; \frac{27}{9}; \frac{1}{1}; \frac{3}{4}; \frac{12}{5}; \frac{6}{8}; \frac{3}{1}$

2). Fie mulțimea  $A = \left\{ \frac{12}{2}; -8; \frac{15}{4}; 3; \frac{21}{3}; 0; -5; \frac{51}{3} \right\}$ . Să se afle : a).  $A \cap \mathbb{N}$ ; b).  $A \cap \mathbb{Z}$ ;

c).  $A \cap \mathbb{Q}$ ; d).  $A \cap (\mathbb{Z} - \mathbb{N})$ ; e).  $A \cap (\mathbb{Q} - \mathbb{Z})$ .

3). Fie mulțimea  $B = \left\{ 2,3; \frac{5}{6}; 7; 0; 1,(3); -0,2(5) \right\}$ . Aflați : a).  $B \cap \mathbb{N}$ ; b).  $B \cap \mathbb{Q}$ ; c).  $B \cap (\mathbb{Q} - \mathbb{N})$ .

4). Transformați în fracții ordinare :

a). 2,3    b). 0,15    c). 3,107    d). 0,(3)    e). 0,(31)    f). 1,(13)

g). 2,(107)    h). 0,2(3)    i). 0,12(3)    j). 0,01(72)    k). 1,2(108)    l). 2,73(5)

5). Transformați în fracții zecimale sau periodice :

a).  $\frac{2}{3}$     b).  $\frac{5}{6}$     c).  $\frac{4}{5}$     d).  $3\frac{1}{2}$     e).  $4\frac{2}{5}$     f).  $\frac{6}{7}$     g).  $3\frac{1}{11}$     h).  $2\frac{3}{13}$     i).  $\frac{17}{20}$

6). Care dintre următoarele fracții sunt ireductibile :

a).  $\frac{6}{8}$     b).  $\frac{34}{51}$     c).  $\frac{26}{65}$     d).  $\frac{57}{27}$     e).  $\frac{35}{60}$     f).  $\frac{23}{50}$     g).  $\frac{84}{91}$     h).  $\frac{70}{9}$     i).  $\frac{121}{33}$

7). Găsiți fracții echivalente cu : a).  $\frac{3}{4}$ ;    b).  $\frac{2}{3}$ ;    c).  $\frac{5}{6}$ ;    d).  $\frac{1}{2}$ ;    e).  $\frac{7}{3}$

8). Aflați  $x \in \mathbb{N}$  dacă :

a).  $\frac{12}{x+2} = \frac{9}{6}$      $\mathbb{R} : 6$     b).  $\frac{18}{12} = \frac{2x+1}{10}$      $\mathbb{R} : 7$     c).  $\frac{x+4}{3x+2} = \frac{15}{20}$      $\mathbb{R} : 2$

9). Aflați  $x \in \mathbb{N}$  : a).  $\frac{7}{x} \in \mathbb{N}$ ;    b).  $\frac{9}{x+1} \in \mathbb{N}$ ;    c).  $\frac{5}{2x+1} \in \mathbb{N}$ ;    d).  $\frac{x+7}{x-1} \in \mathbb{N}$

10). Determinați elementele mulțimii :  $A = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \frac{1}{2} < x < \frac{18}{5} \right\}$ .

11). Aflați  $x \in \mathbb{N}$  astfel încât fracția  $\frac{3x+6}{4x+3}$  să fie : a). subunitară; b). echiunitară; c). supraunitară.

$\mathbb{R} : \text{a). } x > 3; \text{ b). } x = 3; \text{ c). } x < 3.$

12). Demonstrați că următoarele fracții sunt subunitare, oricare  $n \in \mathbb{N}$  :

a).  $x = \frac{2^{3n}}{3^{2n}}$      $\mathbb{R} : x = \left( \frac{8}{9} \right)^n$     b).  $\mathbb{R} : y = \frac{1}{4}$

c).  $z = \frac{10^{n+1} + 2^n \cdot 5^{n+1} + 5^n \cdot 2^{n+1}}{15^{n+1} - 3^{n+1} \cdot 5^n + 3^n \cdot 5^{n+1}}$      $\mathbb{R} : z = \left( \frac{2}{3} \right)^n$



## Aducerea fracțiilor la același numitor

\*  
1). Să se aducă următoarele fracții la același numitor :

a).  $\frac{2}{3}; \frac{5}{6}; \frac{7}{2}$ ;    b).  $\frac{5}{2}; \frac{1}{5}; \frac{7}{10}$ ;    c).  $\frac{1}{4}; \frac{3}{2}; \frac{1}{3}$ ;    d).  $\frac{7}{12}; \frac{2}{3}; \frac{3}{2}; \frac{5}{6}$ ;    e).  $\frac{2}{7}; \frac{3}{14}; \frac{1}{4}$ ;    f).  $\frac{2}{6}; \frac{5}{4}; \frac{1}{8}$ ;  
g).  $\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; \frac{7}{10}$ ;    h).  $\frac{3}{28}; \frac{5}{7}; \frac{11}{14}$ ;    i).  $\frac{3}{7}; \frac{1}{3}; \frac{5}{21}$ ;    j).  $\frac{1}{5}; \frac{2}{3}; \frac{4}{15}$ ;    k).  $\frac{1}{3}; \frac{3}{8}; \frac{5}{6}$ ;  
l).  $\frac{5}{6}; \frac{7}{10}; \frac{1}{2}; \frac{4}{3}$ ;    m).  $\frac{4}{5}; \frac{1}{35}; \frac{2}{7}$ ;    n).  $\frac{1}{12}; \frac{7}{24}; \frac{1}{8}$ ;    o).  $\frac{1}{9}; \frac{2}{3}; \frac{1}{2}; \frac{5}{4}; \frac{11}{6}$ ;    p).  $\frac{2}{11}; \frac{1}{2}; \frac{3}{22}$ ;  
r).  $\frac{1}{8}; \frac{3}{14}; \frac{5}{28}; \frac{1}{7}$ ;    s).  $\frac{1}{8}; \frac{5}{16}; \frac{1}{3}$ ;    t).  $\frac{28}{21}; \frac{6}{12}; \frac{24}{32}$ ;    u).  $\frac{15}{18}; \frac{6}{12}; \frac{27}{36}$ ;    v).  $\frac{6}{30}; \frac{21}{14}; \frac{5}{20}$ .

2). Să se aducă următoarele fracții la același numitor :

a).  $\frac{3}{10}; \frac{2}{5}; \frac{5}{2}$ ;    b).  $\frac{1}{24}; \frac{2}{3}; \frac{5}{8}; \frac{7}{12}$ ;    c).  $\frac{7}{6}; \frac{5}{9}; \frac{11}{3}; \frac{5}{2}$ ;  
d).  $\frac{13}{15}; \frac{7}{30}; \frac{16}{10}; \frac{1}{2}$ ;    e).  $\frac{9}{48}; \frac{12}{16}; \frac{5}{8}; \frac{1}{6}; \frac{3}{2}; \frac{10}{12}$ ;    f).  $\frac{7}{9}; \frac{11}{36}; \frac{5}{12}; \frac{9}{4}; \frac{13}{18}$ .

\*\*

3). Să se aducă următoarele fracții la același numitor :

a).  $\frac{7}{16}; \frac{2}{3}$  și  $\frac{5}{6}$ ;    b).  $\frac{7}{10}; \frac{3}{4}$  și  $\frac{2}{25}$ ;    c).  $\frac{3}{98}; \frac{1}{49}$  și  $\frac{7}{4}$ ;    d).  $\frac{2}{63}; \frac{4}{49}$  și  $\frac{4}{9}$ ;  
e).  $\frac{1}{2}; \frac{3}{4}; \frac{5}{6}$  și  $\frac{2}{3}$ ;    f).  $\frac{3}{4}; \frac{1}{3}; \frac{7}{6}$  și  $\frac{5}{2}$ ;    g).  $\frac{3}{8}; \frac{1}{16}; \frac{5}{18}$ ;  
h).  $\frac{1}{12}; \frac{7}{6}; \frac{3}{9}; \frac{5}{4}$ ;    i).  $\frac{13}{24}; \frac{7}{40}; \frac{2}{15}; \frac{9}{30}$ ;    j).  $\frac{2}{33}; \frac{12}{55}; \frac{4}{15}; \frac{5}{11}$ ;  
k).  $\frac{2}{7}; \frac{1}{28}; \frac{3}{14}; \frac{8}{21}$ ;    l).  $\frac{9}{10}; \frac{7}{20}; \frac{12}{25}; \frac{41}{50}; \frac{13}{100}$ ;    m).  $\frac{13}{36}; \frac{11}{24}; \frac{7}{18}; \frac{5}{6}$ ;  
n).  $\frac{3}{10}; \frac{1}{5}; \frac{5}{2}$ ;    o).  $\frac{5}{6}; \frac{1}{5}; \frac{7}{30}$ ;    p).  $\frac{5}{6}; \frac{2}{3}; \frac{7}{9}$ ;    r).  $\frac{3}{4}; \frac{1}{2}; \frac{4}{7}$ .

4). Să se scrie în ordine crescătoare :

a).  $\frac{5}{4}; \frac{2}{3}; \frac{1}{6}$ ;    b).  $\frac{2}{9}; \frac{5}{6}; \frac{3}{2}; \frac{4}{3}$ ;    c).  $1; \frac{15}{14}; \frac{3}{7}; \frac{5}{2}$ ;  
d).  $\frac{9}{4}; \frac{7}{6}; \frac{5}{2}; \frac{10}{3}$ ;    e).  $\frac{11}{200}; \frac{13}{300}; \frac{17}{600}; \frac{8}{150}$ ;    f).  $\frac{2}{33}; \frac{13}{55}; \frac{29}{165}$ .

## Introducerea și scoaterea întregilor

\*

1). Să se introducă întregii în fracție :

a).  $3\frac{1}{2}$ ;      b).  $2\frac{1}{2}$ ;      c).  $4\frac{1}{3}$ ;      d).  $5\frac{2}{3}$ ;      e).  $3\frac{4}{5}$

2). Să se scoată întregii din fracție :

a).  $\frac{10}{7}$ ;      b).  $\frac{3}{2}$ ;      c).  $\frac{12}{5}$ ;      d).  $\frac{18}{7}$ ;      e).  $\frac{25}{3}$ ;      f).  $\frac{28}{3}$ ;      g).  $\frac{104}{30}$

\*\*

3). Să se efectueze și să se scoată întregii din rezultat, atunci când se poate :

a).  $5\frac{7}{8} + \frac{17}{48} + 1\frac{1}{3} =$       R:  $7\frac{9}{16}$       b).  $1\frac{1}{15} + \frac{4}{5} + 2 =$       R:  $3\frac{13}{15}$   
 c).  $3\frac{3}{4} + \frac{5}{6} + 1\frac{1}{8} =$       R:  $5\frac{17}{24}$       d).  $4\frac{5}{6} + 1 + 2\frac{1}{2} + 3\frac{2}{3} =$       R: 12

## Ordonarea numerelor raționale

\*

1). Să se așeze semnele „<” și „>” corect :

a).  $\frac{3}{4}$  și  $\frac{5}{4}$ ;      b).  $\frac{3}{8}$  și  $\frac{5}{8}$ ;      c).  $\frac{4}{3}$  și  $\frac{4}{5}$ ;      d).  $\frac{7}{2}$  și  $\frac{7}{3}$ ;      e).  $\frac{3}{4}$  și  $\frac{1}{2}$ ;      f).  $\frac{4}{3}$  și  $\frac{6}{5}$ ;  
 g).  $2\frac{1}{3}$  și  $2\frac{1}{5}$ ;      h).  $3\frac{4}{9}$  și  $3\frac{5}{10}$ ;      i).  $5\frac{9}{12}$  și  $5\frac{6}{8}$ ;      j).  $6\frac{1}{2}$  și  $5\frac{3}{4}$ ;      k).  $\frac{13}{3}$  și  $\frac{27}{4}$

\*\*

2). Să se scrie valoarea logică a fiecărei propoziții :

a).  $\frac{1}{2} < \frac{3}{6}$ ;      b).  $\frac{2}{5} > \frac{1}{6}$ ;      c).  $\frac{7}{12} < \frac{2}{3}$ ;      d).  $\frac{81}{144} = \frac{27}{48}$ ;      e).  $\frac{11}{169} < \frac{9}{26}$ ;  
 f).  $\frac{17}{12} > \frac{1}{18}$ ;      g).  $\frac{6}{7} < \frac{13}{14} < \frac{85}{12}$ ;      h).  $\frac{9}{14} < \frac{7}{12} < \frac{13}{28}$ ;      i).  $\frac{2}{49} < \frac{1}{21} < \frac{3}{35} < \frac{4}{15}$

3). Să se așeze în ordine crescătoare numerele raționale :

a).  $\frac{1}{6}; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{8}; \frac{1}{4}$       b).  $\frac{3}{5}; \frac{1}{5}; \frac{7}{5}; \frac{41}{5}; \frac{12}{5}; 2; 3\frac{1}{5}$       c).  $\frac{2}{3}; \frac{4}{5}; \frac{7}{15}$   
 d).  $\frac{3}{8}; \frac{1}{4}; \frac{5}{16}; \frac{7}{2}; 1$       e).  $\frac{6}{5}; 1; \frac{1}{10}; \frac{4}{15}; \frac{7}{10}; 1\frac{1}{10}$

4). Să se determine  $x \in \mathbb{N}$  în fiecare caz în parte :

a).  $\frac{x}{2} < \frac{7}{2}$ ;      b).  $\frac{7}{5} \geq \frac{x}{5}$ ;      c).  $\frac{12}{x} \geq \frac{12}{5}$ ;      d).  $\frac{13}{7} < \frac{13}{x}$ ;      e).  $\frac{x}{6} < \frac{5}{6}$ ;      f).  $\frac{x+2}{7} \leq \frac{5}{7}$ ;      g).  $\frac{x+5}{3} \leq \frac{7}{3}$ ;  
 h).  $\frac{3x}{7} \leq \frac{9}{7}$ ;      i).  $\frac{8}{3x} \geq \frac{8}{6}$ ;      j).  $\frac{x}{4} < \frac{5}{2}$ ;      k).  $\frac{x}{3} \leq \frac{7}{6}$ ;      l).  $\frac{2}{3} \geq \frac{x}{9}$ ;      m).  $\frac{7}{4} > \frac{x}{2}$ ;      n).  $\frac{x}{3} < \frac{7}{2}$

5). Ordonati crescator :  $\frac{x}{x+1}; \frac{x+3}{x+2}; \frac{x-4}{x}, x \in \mathbb{N}^*$ .

6). Aflati  $x \in \mathbb{N}$  dacă se știe :

a).  $\frac{1}{2} < \frac{x}{3} < \frac{4}{3}$       b).  $\frac{5}{2} < \frac{x}{3} < \frac{17}{5}$       c).  $\frac{2}{3} < \frac{x+1}{2} < \frac{6}{5}$       d).  $\frac{1}{3} < \frac{2x+1}{2} < \frac{13}{4}$

$$e). \frac{6}{5} < \frac{3}{x} < 2 \quad f). \frac{3}{7} < \frac{4}{x-2} < \frac{5}{2} \quad g). \frac{6}{5} < \frac{2}{2x+1} < \frac{12}{5}$$

7). Ordonați descrescător :  $\frac{1}{x} + 1$ ;  $1 + \frac{1}{2x}$ ;  $\frac{x}{x} + \frac{1}{x+1}$ ;  $x \in \mathbb{N}^*$ .

## Adunarea și scăderea în Q

\*

1). Dovedește că ai înțeles lecția și calculează :

$$a). 5\frac{1}{3} - 2 = \quad R : 3\frac{1}{3}$$

$$b). 4\frac{1}{3} - 3 = \quad R : 1\frac{1}{3}$$

$$c). 6\frac{2}{3} - 4\frac{1}{3} = \quad R : 2\frac{1}{3}$$

$$d). 5\frac{2}{7} - 1\frac{1}{7} = \quad R : 4\frac{1}{7}$$

$$e). 6\frac{3}{4} - 5\frac{1}{2} = \quad R : 1\frac{1}{4}$$

$$f). 4 - 3\frac{1}{2} = \quad R : \frac{1}{2}$$

$$g). 7\frac{1}{2} - 5\frac{3}{4} = \quad R : 1\frac{3}{4}$$

$$h). 3\frac{1}{6} - 2 - \frac{5}{6} = \quad R : \frac{1}{3}$$

$$i). 2\frac{2}{3} + \frac{4}{9} - 3 = \quad R : \frac{1}{9}$$

$$j). 5\frac{4}{5} + \frac{1}{2} - 6 = R : \frac{3}{10}$$

$$k). 4\frac{5}{18} + 3 - 6\frac{1}{2} = R : \frac{7}{9}$$

$$l). \frac{1}{3} + 2\frac{1}{2} - 1 = \quad R : 1\frac{5}{6}$$

$$m). \frac{15}{8} - 1 = \quad R : \frac{7}{8}$$

$$n). \frac{1}{3} + 1\frac{1}{2} - 1\frac{1}{4} = R : \frac{7}{12}$$

$$o). \frac{16}{5} - 2 = \quad R : 1\frac{1}{5}$$

$$p). \frac{22}{4} - 4 = \quad R : 1\frac{1}{2}$$

$$r). \frac{42}{5} - 7\frac{1}{2} = R : \frac{9}{10}$$

$$s). \frac{63}{8} - 2 - 4\frac{1}{2} = R : 1\frac{3}{8}$$

$$t). 5\frac{7}{8} - 2\frac{3}{16} - \frac{4}{3} + \frac{1}{4} = R : 2\frac{29}{48}$$

$$u). 3\frac{5}{6} - \frac{3}{5} + 1\frac{1}{2} - \frac{7}{3} = R : 2\frac{2}{5}$$

2). Poți să le rezolvi în 15 minute ? Încearcă :

$$a). \frac{1}{6} + \frac{1}{3} + \frac{5}{12} =$$

$$b). 2\frac{1}{5} + \frac{7}{10} + 1\frac{1}{2} =$$

$$c). 2 + 1\frac{1}{3} + \frac{5}{6} + \frac{1}{4} =$$

$$d). 1\frac{1}{12} + \frac{5}{30} + 2\frac{1}{4} =$$

$$e). \frac{7}{140} + \frac{2}{5} + \frac{5}{60} =$$

$$f). 1\frac{4}{72} + 2\frac{1}{6} + 3\frac{1}{3} + 1 =$$

$$g). 2 - \frac{3}{2} =$$

$$h). 1 + \frac{5}{6} - 1\frac{2}{3} =$$

$$i). 6\frac{1}{4} - \frac{3}{8} + \frac{1}{12} =$$

$$j). 3\frac{1}{12} - \frac{3}{4} - \frac{7}{18} =$$

$$k). 5\frac{1}{14} - 2\frac{4}{21} - 1\frac{3}{28} =$$

\*\*\*

3). Să se efectueze (simplificați înainte să aduceți la același numitor) :

$$a). 7 - 2\frac{1}{3} - 3\frac{4}{5} =$$

$$R : \frac{13}{15}$$

$$b). 2\frac{5}{15} + 3\frac{1}{18} - 4\frac{1}{6} = \quad R : 1\frac{2}{9}$$

$$c). \frac{10}{16} + 1\frac{6}{15} - \frac{3}{30} - \frac{15}{100} = \quad R : 1\frac{31}{40}$$

$$d). \frac{16}{36} + 2\frac{7}{21} - \frac{6}{36} - \frac{7}{30} = \quad R : 2\frac{17}{45}$$

$$e). \frac{35}{120} + \frac{21}{27} - \frac{25}{90} =$$

$$R : \frac{19}{24}$$



4). Să se verifice egalitățile :

$$a). \frac{1}{12} + \frac{3}{16} + \frac{7}{24} = \frac{9}{16}$$

$$b). \frac{1}{24} + \frac{2}{42} + \frac{11}{56} = \frac{13}{42}$$

$$c). \frac{1}{6} + \left( \frac{1}{18} + \frac{1}{24} \right) = \left( \frac{1}{6} + \frac{1}{18} \right) + \frac{1}{24}$$

$$d). \frac{5}{9} + \frac{1}{12} + \frac{7}{18} = 1 + \frac{1}{36}$$

$$e). 4 + \frac{2}{3} + \frac{5}{15} + \frac{1}{2} = \frac{3}{6} + 2 + \left( \frac{13}{12} + \frac{10}{24} \right)$$

$$f). \left( \frac{1}{10} + \frac{1}{35} \right) + \left( 2 + \frac{1}{14} \right) = \left( 2 + \frac{3}{30} \right) + \left( \frac{1}{35} + \frac{2}{28} \right)$$

5). Să se calculeze (simplificând rezultatul) :

$$a). \frac{5}{36} + \frac{3}{48} + \frac{8}{18} + \frac{11}{72} = \quad R : \frac{115}{144}$$

$$c). \frac{1}{132} + \frac{4}{88} + \frac{3}{99} + \frac{6}{72} = \quad R : \frac{1}{6}$$

$$e). \frac{1}{39} + \frac{4}{117} + \frac{6}{169} = \quad R : \frac{145}{1521}$$

$$g). \frac{13}{135} + \frac{8}{90} + \frac{44}{54} = \quad R : 1$$

$$i). \frac{1}{3^2 \cdot 7} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{2 \cdot 3^2 \cdot 7^2} + \frac{1}{3 \cdot 7^2} = \quad R : \frac{4}{21}$$

$$j). \frac{1}{5 \cdot 7 \cdot 11} + \frac{20}{5^2 \cdot 7^2 \cdot 11} + \frac{3}{5 \cdot 7^2} + \frac{1}{7^2 \cdot 11} = \quad R : \frac{1}{55}$$

$$k). \frac{1}{2^2 \cdot 3^4} + \frac{1}{2^4 \cdot 3^7} + \frac{1}{2^3 \cdot 3^5} + \frac{1}{2^3 \cdot 3^7} = \quad R : \frac{43}{2^4 \cdot 3^6}$$

6). Verifică dacă rezultatele sunt corecte :

$$a). \frac{312}{11^2 \cdot 13^3} - \frac{2}{11 \cdot 13^3} - \frac{1}{11^2 \cdot 13} = \quad R : \frac{1}{13^3} \quad b). 1 - \left[ \frac{10}{63} + \left( \frac{5}{42} - \frac{1}{18} \right) + \frac{2}{21} \right] = \quad R : \frac{43}{63}$$

$$c). \left( \frac{3}{56} - \frac{1}{28} \right) - \left( \frac{8}{42} - \frac{10}{56} \right) = \quad R : \frac{1}{168} \quad d). \frac{3}{8} - \left[ \frac{3}{14} - \left( \frac{5}{28} - \frac{11}{84} \right) \right] = \quad R : \frac{5}{24}$$

7). Verifică dacă rezultatele sunt corecte :

$$a). \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \right) + \left[ \frac{1}{12} + \left( \frac{1}{16} + \frac{3}{8} \right) \right] = R : \frac{61}{48} \quad b). \left( \frac{3}{5} + \frac{2}{5} \right) + \left[ \left( \frac{6}{9} + \frac{7}{18} \right) + \frac{34}{36} \right] = R : 3$$

$$c). \frac{1}{3} + \left( \frac{5}{6} + 3 \right) + \frac{3}{18} = \quad R : \frac{13}{3} \quad d). \left( 3 + \frac{1}{3} \right) + \left[ \frac{5}{6} + \left( \frac{1}{4} + 2 \right) + \frac{1}{8} \right] = \quad R : \frac{157}{24}$$

8). Te știu perseverent. Dovedește :

$$a). \frac{3}{4} + \frac{1}{3} - \left( 1 - \frac{1}{2} \right) = \quad b). \frac{5}{6} + \frac{1}{2} - \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) = \quad c). \frac{15}{16} - \frac{1}{2} - \left( \frac{7}{8} - \frac{3}{4} \right) =$$

$$d). 4 - \frac{1}{8} - \left[ 2 - \left( \frac{3}{2} - \frac{3}{4} \right) \right] = \quad e). \frac{13}{20} + \frac{1}{2} - \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \right) = \quad f). \frac{31}{24} - \frac{1}{3} - \left( \frac{1}{6} + \frac{3}{4} \right) =$$

$$g). 7 - \left[ 4 - \left( 2 - \frac{1}{7} - \frac{1}{3} \right) \right] = \quad h). 2 - \left( \frac{13}{8} - \frac{1}{3} \right) - \left( \frac{3}{4} - \frac{5}{12} \right) = \quad i). \frac{24}{11} - \frac{1}{2} - \left( \frac{1}{22} + \frac{3}{11} \right) =$$

$$j). \frac{5}{6} + \frac{1}{3} - \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{6} \right) = \quad k). \frac{13}{10} - \frac{7}{20} - \left( \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \right) = \quad l). \frac{7}{15} + \frac{17}{5} - \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right) =$$

$$m). \frac{17}{30} - \frac{1}{3} - \left( \frac{1}{10} - \frac{1}{15} \right) = \quad n). \frac{4}{5} + \frac{7}{8} - \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} \right) =$$

9). Să se calculeze :

$$a). \left( \frac{5}{13} + \frac{16}{26} \right) + \left( \frac{7}{9} - \frac{12}{27} \right) - \frac{5}{6} = \quad b). \frac{3}{20} + \frac{5}{30} - \frac{17}{60} = \quad c). \frac{6}{5} + 1\frac{1}{8} + \frac{3}{20} - 2\frac{1}{4} =$$

$$d). \left( \frac{5}{71} + \frac{132}{142} \right) + 1\frac{2}{4} - 2 = \quad e). 4 - \frac{3}{5} + \frac{9}{10} - \frac{3}{2} =$$

10). Ai încredere în tine ? Încearcă :

$$a). 5\frac{5}{6} - 2\frac{1}{9} - \left( 4 - 3\frac{1}{3} \right) = \quad R : 3\frac{1}{18} \quad b). 6 - \frac{4}{15} - 3\frac{7}{12} = \quad R : 2\frac{3}{20}$$

$$c). 2\frac{1}{4} + 3\frac{1}{5} - \frac{7}{10} = \quad R : 4\frac{3}{4} \quad d). 3 + 2\frac{1}{22} - 3\frac{4}{33} = \quad R : 1\frac{61}{66}$$

$$e). 1\frac{3}{28} + \frac{5}{21} - 1\frac{1}{7} = \quad R : \frac{17}{84} \quad f). 3\frac{8}{9} + \frac{7}{12} - 2\frac{11}{30} = \quad R : 2\frac{19}{180}$$

$$g). 5 - 2\frac{3}{8} + \frac{5}{6} = \quad R : 3\frac{11}{24} \quad h). 3\frac{1}{6} - \left( 2\frac{1}{2} - 1\frac{1}{3} \right) = \quad R : 2$$

$$i). 4\frac{3}{7} - \left( 4 - 2\frac{1}{2} + \frac{3}{7} - \frac{1}{4} \right) = \quad R : 2\frac{3}{4} \quad j). 7 - \left( 2\frac{1}{6} + 3\frac{1}{9} \right) = \quad R : 1\frac{13}{18}$$

$$k). 8\frac{10}{35} - \left( 1\frac{2}{28} + 3\frac{15}{63} \right) = \quad R : 3\frac{41}{42} \quad l). 1\frac{3}{5} - \frac{1}{2} + 6 - \left( 3\frac{1}{10} - \frac{4}{5} \right) = \quad R : 4\frac{4}{5}$$

$$m). 4\frac{7}{15} - \left( 3\frac{8}{20} - 2\frac{11}{30} \right) = \quad R : 3\frac{13}{30} \quad n). 7 + 2\frac{9}{36} - \left( 1\frac{6}{32} + 3\frac{35}{56} \right) = \quad R : 4\frac{7}{16}$$

$$o). 8 - 3\frac{7}{70} - \left[ 5 - \left( 1\frac{20}{150} + 2\frac{55}{66} \right) \right] = \quad R : 3\frac{13}{15}$$

11). O echipă este formată din 3 muncitori. Dacă primul lucrând singur ar termina o lucrare în 4 ore, al doilea lucrând singur ar termina aceeași lucrare în 6 ore și al treilea ar termina lucrarea în 12 ore, în câte ore o vor termina dacă lucrează împreună ?

12). Într-un bidon sunt  $12\frac{3}{4}$  litri de lapte. Câți litri de lapte s-au vândut dacă au mai rămas în bidon  $4\frac{1}{4}$  l?

13). Radu a citit într-o zi  $\frac{12}{27}$  dintr-o carte cu povești, iar a doua zi cu  $\frac{2}{27}$  mai puțin. Cât mai are de citit din cartea cu povești?

14). Pentru o bluză se folosesc  $1\frac{2}{3}$  m de material. Dintr-o bucată de 10 m s-a tăiat o bucată necesară confecționării a două bluze. Ce lungime are bucata rămasă?

15). Bunicul a cultivat sfeclă pe  $\frac{1}{11}$  din grădina sa, varză pe o suprafață cu  $\frac{2}{11}$  mai mare, iar ceapă pe  $\frac{4}{11}$  din suprafață. Ce parte din suprafața grădinii rămâne pentru a cultiva morcovul?

\*\*\*

16). Să se determine cifra a astfel încât :

$$a). \frac{3a}{12} + \frac{a}{6} = \frac{a2}{12}$$

$$b). \frac{2a}{8} + \frac{a1}{16} = \frac{77}{16}$$

$$c). \frac{a4}{16} - \frac{2a}{8} = \frac{1}{4}$$

## Înmulțirea

\*

1). Să se efectueze simplificând rezultatul :

$$a). \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = R : \frac{1}{10}$$

$$d). \frac{6}{11} \cdot \frac{22}{9} \cdot \frac{3}{2} = R : 2$$

$$g). 12 \cdot \frac{5}{8} \cdot 40 \cdot \frac{1}{125} \cdot \frac{5}{36} = R : \frac{1}{3}$$

$$b). \frac{3}{7} \cdot \frac{14}{9} = R : \frac{2}{3}$$

$$e). \frac{5}{6} \cdot \frac{18}{25} \cdot \frac{30}{9} \cdot \frac{1}{4} = R : \frac{1}{2}$$

$$h). \frac{2^3}{3^4} \cdot \frac{3 \cdot 5}{2^2} \cdot \frac{3^2}{5^3} \cdot \frac{5}{2 \cdot 3} \cdot \frac{3^2}{1} = R : \frac{1}{5}$$

$$c). \frac{2}{3} \cdot 6 = R : 4$$

$$f). \frac{7}{9} \cdot \frac{12}{5} \cdot \frac{10}{21} \cdot \frac{3}{8} = R : \frac{1}{3}$$

$$i). 4 \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{2}{15} \cdot 25 \cdot \frac{1}{27} \cdot 3 = R : 1\frac{2}{3}$$

\*\*\*

2). Efectuați înmulțirea după ce ați introdus întregii :

$$a). 2\frac{1}{3} \cdot \frac{9}{28} = R : \frac{3}{4}$$

$$e). 5\frac{3}{8} \cdot 1\frac{5}{43} = R : 6$$

$$i). 14 \cdot 1\frac{3}{6} \cdot \frac{13}{27} \cdot \frac{1}{26} \cdot \frac{10}{15} \cdot 2\frac{4}{7} = R : \frac{2}{3}$$

$$b). 1\frac{1}{2} \cdot 4 = R : 6$$

$$f). \frac{2}{3} \cdot 1\frac{1}{8} \cdot \frac{5}{6} = R : \frac{5}{8}$$

$$j). \frac{7}{15} \cdot 9 \cdot 1\frac{11}{14} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{18} \cdot 2 = R : \frac{2}{3}$$

$$c). 4\frac{1}{4} \cdot \frac{8}{17} = R : 2$$

$$g). 2\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{9} = R : 1\frac{1}{3}$$

$$h). \frac{15}{16} \cdot \frac{12}{25} \cdot 1\frac{1}{9} \cdot 6\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{11} \cdot 8\frac{1}{4} = R : \frac{81}{16}$$

$$d). 2\frac{1}{2} \cdot 7\frac{1}{5} = R : 18$$

$$h). 3\frac{1}{3} \cdot \frac{4}{10} \cdot 1\frac{1}{8} = R : \frac{3}{2}$$

3). Să se efectueze respectând ordinea efectuării operațiilor :

$$a). \frac{2}{3} + \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{5} =$$

$$R : 1\frac{1}{3}$$

$$g). 3 \cdot \frac{4}{15} - 2\frac{3}{4} \cdot \frac{2}{33} = R : \frac{19}{30}$$



$$b). 1\frac{1}{2} + \frac{4}{9} \cdot 2\frac{1}{4} = \quad R: 2\frac{1}{2}$$

$$h). \frac{5}{6} \cdot \frac{8}{10} + 1\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} = \quad R: 1\frac{2}{3}$$

$$c). 3\frac{1}{8} \cdot 4 + 1\frac{3}{4} = \quad R: 14\frac{1}{4}$$

$$i). 2\frac{25}{40} + 3\frac{1}{7} \cdot \frac{14}{11} = \quad R: 6\frac{5}{8}$$

$$d). \frac{3}{11} \cdot 1\frac{3}{8} \cdot \frac{4}{22} = \quad R: \frac{17}{88}$$

$$j). 7\frac{3}{8} \cdot \frac{1}{59} + \frac{1}{4} = \quad R: \frac{3}{8}$$

$$e). 3\frac{1}{5} \cdot \frac{10}{20} + \frac{2}{15} \cdot 1\frac{5}{10} = \quad R: 1\frac{4}{5}$$

$$k). 3\frac{1}{6} \cdot \frac{4}{19} + 4\frac{1}{2} \cdot 1\frac{1}{3} = \quad R: 6\frac{2}{3}$$

$$f). 3\frac{4}{7} \cdot 7\frac{3}{5} - 2\frac{1}{2} \cdot 2 = \quad R: 22\frac{1}{7}$$

4). Vrei să iei o notă bună ? Calculează :

$$a). \frac{4}{19} \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) = \quad R: \frac{7}{57}$$

$$b). 1\frac{4}{5} \cdot \left(\frac{1}{12} - \frac{1}{18}\right) = \quad R: \frac{1}{20}$$

$$c). \left(\frac{2}{5} \cdot 3\frac{1}{3} - 1\right) \cdot 1\frac{4}{5} + \frac{1}{10} = \quad R: \frac{7}{10}$$

$$d). 10 \cdot \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{7} - \left(2\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{10} - \frac{3}{5}\right)\right] = \quad R: \frac{38}{7}$$

$$e). \left(\frac{10}{63} - \frac{1}{9}\right) \cdot 21 + 4 \cdot \frac{5}{8} = \quad R: \frac{7}{2}$$

$$f). \left[\frac{1}{15} + \frac{5}{64} \cdot 1\frac{7}{25} - 2 \cdot \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{12}\right)\right] \cdot 10 = \quad R: \frac{5}{6}$$

$$g). \frac{1}{17} \cdot \left(\frac{5}{28} + \frac{1}{42}\right) \cdot \frac{21}{2} = \quad R: \frac{1}{8}$$

$$h). \left[1 - \left(\frac{8}{35} - \frac{2}{15}\right) \cdot 1\frac{2}{12}\right] \cdot \frac{18}{40} - 4\frac{4}{5} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) = R: 0$$

$$i). \left(\frac{3}{7} \cdot 2\frac{3}{9} + \frac{2}{5} \cdot 4\frac{1}{6} - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{24}{29} = \quad R: 2$$

$$j). \left[3\frac{3}{11} \cdot \left(\frac{1}{18} + \frac{5}{12} + \frac{7}{24}\right) - \frac{7}{4}\right] \cdot \frac{10}{15} = \quad R: \frac{1}{2}$$

$$5). \text{Calculați: } \left(1 + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{4}\right) \cdot \dots \cdot \left(1 + \frac{1}{50}\right) =$$

6). Calculați :

$$a). \left(\frac{2}{3}\right)^0 + \left(\frac{2}{3}\right)^1 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \quad R: \frac{19}{9}$$

$$b). \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \frac{5}{9} = \quad R: \frac{5}{36}$$

$$c). \left(\frac{3}{2}\right)^4 : \left(1\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{2} = \quad R: 1$$

$$d). \left[\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \frac{7}{16}\right] \cdot 4 = \quad R: \frac{3}{2}$$

$$e). \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^1 + \left(\frac{4}{3}\right)^0 = \quad R: \frac{13}{9}$$

$$f). \left[\left(\frac{3}{5}\right)^3\right]^7 : \left(\frac{3}{5}\right)^{20} + \frac{2}{5} = \quad R: 1$$

$$g). \left(\frac{4}{3}\right)^2 - \left(\frac{7}{6}\right)^2 = \quad R: \frac{5}{12}$$

$$h). \left[4 + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right] : \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \quad R: 1$$

## Împărțirea

\*

1). Câte exerciții poți rezolva în zece minute. Încearcă :

$$\begin{array}{llllll}
 \text{a). } \frac{1}{2} : \frac{1}{4} = & \text{b). } \frac{3}{5} : \frac{1}{25} = & \text{c). } \frac{7}{12} : \frac{14}{3} = & \text{d). } \frac{11}{5} : 2 = & \text{e). } \frac{14}{3} : 7 = \\
 \text{f). } 15 : \frac{3}{8} = & \text{g). } 2\frac{1}{3} : \frac{7}{9} = & \text{h). } 3\frac{1}{10} : 10 = & \text{i). } 12 : 1\frac{1}{5} = & \text{j). } 5\frac{1}{2} : 8\frac{1}{4} = \\
 \text{k). } 7 : 4\frac{2}{3} = & \text{l). } 4\frac{2}{6} : 2\frac{1}{6} = & \text{m). } 2\frac{4}{7} : \frac{12}{14} = & \text{n). } 4\frac{1}{5} : \frac{3}{25} = \\
 \text{o). } 3\frac{10}{13} : 2\frac{1}{26} = & \text{p). } 1\frac{1}{8} : 6 = & \text{r). } 3\frac{1}{6} : 2\frac{3}{8} = & \text{s). } 4 : 2\frac{1}{2} =
 \end{array}$$

2). Verifică dacă ai înțeles lecția :

$$\begin{array}{llllll}
 \text{a). } \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}} = & \text{b). } \frac{1}{\frac{1}{6}} = & \text{c). } \frac{10}{\frac{5}{3}} = & \text{d). } \frac{1\frac{1}{3}}{\frac{3}{16}} = & \text{e). } \frac{2\frac{1}{2}}{\frac{2}{10}} = & \text{f). } \frac{\frac{3}{7}}{\frac{9}{9}} = \\
 \text{g). } \frac{5}{3\frac{1}{3}} = & \text{h). } \frac{1\frac{1}{5}}{\frac{5}{12}} = & \text{i). } \frac{2\frac{1}{3}}{3\frac{1}{2}} = & \text{j). } \frac{12}{3\frac{2}{6}} = & \text{k). } \frac{\frac{5}{6}}{2\frac{11}{12}} = & \text{l). } \frac{\frac{8}{9}}{1\frac{1}{3}} =
 \end{array}$$

Indicație:  $\frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}} = \frac{2}{3} : \frac{4}{9} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4} = \frac{18}{12} = \frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$ .

\*\*

3). Nu te speria, că nu sunt grele :

$$\begin{array}{llll}
 \text{a). } \frac{1 + \frac{1}{3}}{\frac{5}{6}} = & \text{d). } \frac{2}{\left(\frac{5}{6} + \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)} : \frac{5}{7} - \frac{11}{15} = & \text{g). } \frac{50}{1 : \frac{1}{2}} = & \text{j). } 7 - \frac{5\frac{1}{2} - 4\frac{3}{4}}{2 - \frac{7}{8}} = \\
 \text{b). } \frac{3 - \frac{2}{7}}{19} = & \text{e). } \frac{\left(\frac{2}{5} + \frac{1}{7} - \frac{9}{35}\right) \cdot 2\frac{1}{3}}{4\frac{1}{2}} = & \text{h). } 1 + \frac{7}{3 - \frac{1}{5}} = & \text{k). } 4 - \frac{1}{\frac{5}{1 + \frac{1}{9}} - 3 - 1\frac{5}{6}} = \\
 \text{c). } \frac{4\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right)}{2\frac{2}{9}} = & \text{f). } \frac{\left(\frac{1}{10} + \frac{3}{5}\right) : 7 + 2}{1\frac{2}{5}} = & \text{i). } 16 - \frac{9}{4 - 3\frac{2}{5}} =
 \end{array}$$

## Ordinea efectuării operațiilor

\*\*\*

1). Consolidează-ți cunoștințele și calculează :

$$a). \frac{3}{10} \cdot \frac{28}{9} \cdot 2 \frac{2}{14} =$$

$$c). 6 \frac{6}{11} \cdot \left( \frac{5}{24} + \frac{2}{3} \cdot \frac{21}{36} \right) =$$

$$e). 2^3 : 3 \frac{1}{5} : \left( \frac{2}{5} \right)^2 - \left( \frac{3}{20} - \frac{4}{30} \right) \cdot 6 =$$

$$g). \frac{\frac{6}{112} + \frac{3}{56} : \frac{1}{14}}{4 \frac{1}{2}} =$$

$$2). a). \left[ \left( \frac{3}{8} + \frac{5}{12} \right) \cdot \frac{1}{19} + \frac{1}{4} \right] : 2 \frac{5}{8} = \quad R : \frac{1}{9}$$

$$c). 1 \frac{1}{5} \cdot \left( 2 - \frac{2}{3} : \frac{4}{9} \right) - \frac{17}{10} : 17 = \quad R : \frac{1}{2}$$

$$d). \left[ \left( \frac{3}{7} + \frac{4}{21} \right) : \left( \frac{1}{12} + \frac{1}{14} \right) - 3 \frac{1}{5} \right] \cdot 10 =$$

$$e). 2 : \left\{ 2 - 2 : \left[ 2^2 - 2 : \left( 1 \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{10} \right] \right\} =$$

$$f). \frac{1}{12} : \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \right) + \left( 1 \frac{1}{3} - 2 \frac{1}{7} : 1 \frac{11}{14} \right) \cdot \frac{1}{17} =$$

$$g). \left( \frac{7}{40} + \frac{11}{60} - \frac{4}{15} \right) : \left( \frac{3}{20} + \frac{7}{18} + \frac{8}{60} \right) \cdot \left( 1 + \frac{2}{9} \right) =$$

$$h). \frac{11}{5} : \left( 2 \frac{2}{3} - 1 \frac{1}{5} \right) + 1 : \left[ \left( \frac{5}{3} + \frac{1}{7} - \frac{2}{21} \right) \cdot \frac{1}{6} \right] =$$

$$i). \frac{1}{\frac{5}{6} - \frac{7}{18} - \frac{5}{12}} - 21 \cdot \left( \frac{1}{21} + \frac{5}{14} + 1 \frac{1}{6} \right) =$$

$$j). \left[ \frac{1}{\left( \frac{7}{25} + \frac{8}{50} \right) : 1 \frac{46}{75}} - \frac{2}{3} \right] \cdot 2 \frac{1}{3} =$$

$$b). 1 \frac{2}{5} \cdot \left( 4 \frac{1}{7} - 3 \frac{1}{14} \right) =$$

$$d). \left( 2 + \frac{16}{7} \right) \cdot \left( \frac{6}{45} - \frac{2}{90} \cdot \frac{3}{4} \right) =$$

$$f). \left( \frac{5}{16} - \frac{5}{24} \right) : \frac{15}{72} + 2 \frac{1}{3} : 5 \frac{1}{4} =$$

$$h). \frac{4 \frac{2}{3} \cdot \left( \frac{15}{54} - \frac{4}{18} \right)}{\left( 1 \frac{3}{7} + \frac{1}{14} \right) : \frac{3}{7}} =$$

$$b). \left[ \left( \frac{4}{15} + \frac{7}{20} - \frac{1}{6} \right) : \left( \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \right) \right] \cdot 2 = R : 4$$

R : 8

R : 11

R :  $\frac{8}{45}$

R :  $\frac{1}{6}$

R : 5

R : 3

R : 7



3). Să se calculeze media aritmetică a numerelor :

$$x = \frac{2}{5} + \frac{3}{6} + \frac{4}{7} + \frac{5}{8} + \dots + \frac{47}{50} \quad \text{și} \quad y = \frac{8}{5} + \frac{9}{6} + \frac{10}{7} + \frac{11}{8} + \dots + \frac{53}{50}.$$

4). Dovedește că poți și calculează :

a).  $\frac{3}{10} \cdot \frac{28}{9} \cdot 2\frac{2}{14} =$

b).  $1\frac{2}{5} \cdot \left(4\frac{1}{7} - 3\frac{1}{14}\right) =$  c).  $6\frac{6}{11} \cdot \left(\frac{5}{24} + \frac{2}{3} \cdot \frac{21}{36}\right) =$

d).  $\left(2 + \frac{16}{7}\right) \cdot \left(\frac{6}{45} - \frac{2}{90} \cdot \frac{3}{4}\right) =$

e).  $2^3 : 3\frac{1}{5} : \left(\frac{2}{5}\right)^2 - \left(\frac{3}{20} - \frac{4}{30}\right) \cdot 6 =$

f).  $\left(\frac{5}{16} - \frac{5}{24}\right) : \frac{15}{72} + 2\frac{1}{3} : 5\frac{1}{4} =$

g).  $\frac{\frac{6}{112} + \frac{3}{56} : \frac{1}{14}}{4\frac{1}{2}} =$

h).  $\frac{4\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{15}{54} - \frac{4}{18}\right)}{\left(1\frac{3}{7} + \frac{1}{14}\right) : \frac{3}{7}} =$

5). Vrei să iei o notă bună ? Calculează :

a).  $\frac{5}{3^6} \cdot 9^2 + \frac{7}{2^{16}} : \frac{21}{2^{18}} =$

b).  $6^4 \cdot \frac{7}{2^5 \cdot 3^6} - 4^6 : \frac{2^{16}}{6} =$

c).  $\frac{2^{40} + 4^{20}}{8^{13}} =$

d).  $\frac{6^{30} + 2^{31} \cdot 3^{29}}{5 \cdot 6^{28}} =$

6). Efectuați :

a).  $3,16 + 2,8 =$

b).  $5 - 3,19 =$

c).  $6 + 3,9 + 4,1 - 12,18 =$

d).  $5,3 - 4,79 =$

e).  $4 - 3,178 + 0,028 + 0,15 =$

f).  $5 \cdot 0,3 - 0,18 =$

g).  $0,18 \cdot 25 - 3,65 =$

h).  $5,6 + 4,3 \cdot 2,8 =$

i).  $7 - 2,2 \cdot 1,5 =$

j).  $1,3 \cdot 0,15 + 0,89 =$

k).  $2,16 : 6 + 0,12 =$

l).  $14,4 : 0,6 - 3^2 =$

7). Tu decizi dacă vrei o notă mai bună. Calculează :

a).  $8^2 - 5,4 : 0,09 =$

b).  $1,2^2 - 1,1^2 =$

c).  $5,6 : 2^3 + 0,3 =$

d).  $(3,8 - 0,5^2 \cdot 10) - 0,5^3 \cdot 100 =$

e).  $(0,8 + 4,32 : 2,4) : 13 =$

f).  $\frac{1,8^2 - 3,14}{5,3 - 2,2^2} \cdot 2,3 =$

g).  $\frac{0,1(3) + 0,1(6)}{0,6} + 0,2(27) =$

h).  $\frac{4,32 : 0,2 : 0,3 - 8^2}{5,6 : 7} - 3^2 =$

i).  $[3, (8) - 1,5] : 4,3 =$

j).  $\left[0, (6) + \frac{5,13}{9}\right] : 3,71 - 0, (3) =$

k).  $\frac{0,58 : 2 - 0,5^2}{0,18} - 0, (2) =$

l).  $\frac{3,61 : 0,19 - 4^2}{0, (3)} =$

8). Să se rezolve în Q :

a).  $4x = 92$

b).  $5x = 1,05$

c).  $2\frac{1}{3}x = 5\frac{1}{3}$

d).  $0,6x = 1,92$

e).  $0,3x = 0, (3)$

f).  $0,8x = 4$       g).  $3x = 0,18$       h).  $\frac{x}{3} = 1,9$       i).  $2\frac{1}{2}x = 2,5$       j).  $0,(6)x = \left(\frac{2}{3}\right)^2$

9). Să se rezolve în  $\mathbb{Q}$  :

a).  $2x + 3 = 17$       b).  $5x + 0,1 = 2,6$       c).  $3x - \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2}$       d).  $4x + 0,(2) = 4,(3)$

e).  $\frac{x}{2} + 3 = 4\frac{1}{2}$       f).  $\frac{2x}{3} - 0,2 = 4\frac{1}{3}$       g).  $2x + \frac{3x}{4} + 2 = 5\frac{3}{4}$

10). Fie mulțimile :

a).  $A = \left\{ x \in \mathbb{N} \mid \frac{4x}{10} + 8 = 12,4 \right\}$

b).  $B = \{ x \in \mathbb{N} \mid 4 \leq x \leq 15, x \text{ prim} \}$

c).  $C = \{ x \in \mathbb{N} \mid 10 \leq x \leq 15, x : 3 \}$

d).  $D = \{ x \in \mathbb{N} \mid \overline{2x2} : 3 \}$

Să se afle :  $(A - B) \cup (C \cap D)$ ;  $B \cap D) \cup (A \cap B)$ ;  $(C - A) - (C - B)$

11). Un număr este egal cu  $\frac{3}{8}$  din altul și suma lor este 2,2. Să se afle numerele.

12). Să se afle un număr știind că scăzând  $\frac{2}{3}$  din el obținem 7.

13). Fii perseverent și calculează :

a).  $\frac{5}{6} + \frac{5}{6} : 3\frac{1}{3} - \frac{3}{20} =$

b).  $\left[ \left( \frac{1}{10} - \frac{1}{15} \right) \cdot 2\frac{3}{4} - \frac{5}{72} \right] : \left( \frac{4}{5} \right)^2 =$

c).  $\frac{3}{5} : 0,6 + 1,2^2 : \frac{1}{0,(3)} : 0,2 =$

d).  $[5,(6) + 4,5] : 0,61 + 3,(3) =$

e).  $(3,18 + 1,2^2 : 0,3^2 - 10) : 0,9 =$

14). Vrei să fi și tu printre primii din clasă ? Calculează :

a).  $\left[ \frac{5}{18} + 0,(7) \right] : 3,8 + 2,(7) =$

b).  $\left( \frac{2}{3} + 2\frac{1}{5} : \frac{11}{20} - 4\frac{1}{2} \right) \cdot 3^2 - \frac{1}{5} =$

c).  $8 \cdot \left[ 3\frac{1}{3} - \left( \frac{11}{15} - \frac{4}{6} \right) \right] =$

d).  $\left( \frac{3}{2} \right)^6 \cdot \left( 1\frac{1}{2} \right)^5 : \frac{81}{16} \cdot \frac{1}{\left( 4 - 2\frac{1}{2} \right)^4} =$

e).  $\left( 1,8 : 2,4 - \frac{1}{6} \cdot 2\frac{2}{5} \right) \cdot \frac{20}{7} =$

f).  $\frac{2,(3) \cdot \frac{1}{7} - 0,2(8)}{0,2 \cdot \left( \frac{1}{3} \right)^2} =$

15). Testează-te singur calculând :

a).  $\left\{ \frac{7}{36} - \frac{1}{46} \cdot [5,(6) - 3,75] \right\} : 1\frac{3}{8} =$

b).  $\left[ 0,2 \cdot \left( \frac{5}{6} \right)^2 + 0,25 \right] : \frac{7}{12}$

c).  $\left[ 0,(3) + 0,5 + \frac{1}{12} \right] : \left[ 1 - \frac{1}{3} \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^2 \right]$

d). Să se calculeze numărul cu  $0,1(6)$  mai mic decât suma dintre  $a = 2\frac{5}{6} : \frac{17}{3} + 2\frac{1}{2}$  și  $b = (0,5^2 - 0,25^2) \cdot 2^4$ .

16). a). Arătați că :  $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ , oricare  $n \in \mathbb{N}$ .

b). Calculați : i).  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \dots + \frac{1}{24 \cdot 25} =$  ii).  $\frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{99} =$

17). Aflați  $x \in \mathbb{N}$  dacă :  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{19}{20}$ .

18). a). Arătați că :  $\frac{k}{n(n+k)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+k}$ , oricare  $n, k \in \mathbb{N}$ .

b). Calculați : i).  $\frac{2}{3 \cdot 5} + \frac{2}{5 \cdot 7} + \frac{2}{7 \cdot 9} + \dots + \frac{2}{31 \cdot 33} =$

ii).  $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{2}{2 \cdot 4} + \frac{3}{4 \cdot 7} + \frac{4}{7 \cdot 11} + \frac{5}{11 \cdot 16} + \frac{6}{16 \cdot 22} + \frac{7}{22 \cdot 29} + \frac{8}{29 \cdot 37} =$

19). Calculați :  $\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{100 \cdot 103} =$

20). Aflați  $x \in \mathbb{N}$  dacă :  $\frac{1}{1 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 9} + \frac{1}{9 \cdot 13} + \frac{1}{13 \cdot 17} + \dots + \frac{1}{x(x+n)} = \frac{8}{33}$

21). Calculați :  $\frac{1}{1} + \frac{1}{1+2} + \frac{1}{1+2+3} + \frac{1}{1+2+3+4} + \dots + \frac{1}{1+2+\dots+100} =$

22). a). Arătați că :  $\frac{1}{k(k+1)} < \frac{1}{k^2} < \frac{1}{k(k-1)}$ ,  $k \geq 2$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

b). Demonstrați că :  $\frac{1}{3} < \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{20^2} < \frac{19}{20}$

23). Demonstrați că :  $\frac{4}{5} < \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{49 \cdot 50} < 1$

## Testul 1

1). Dați câte un exemplu de :

⑤ Ip a). fracție subunitară cu numitorul 5 : .....

⑤ Ip b). fracție supraunitară cu numărătorul 3 : .....

⑤ Ip c). fracție echiunitară : .....

⑤ Ip d). fracție echivalentă cu  $\frac{2}{3}$ .

2). Calculați : ⑦ Ip a).  $\frac{5}{8} + \frac{1}{2} - \left( \frac{8}{24} - \frac{5}{30} \right) =$

⑦ Ip b).  $\frac{1}{8} + \frac{1}{4} + \frac{15}{30} =$

⑤ Ip 3). Un copil care avea 12960 timbre, a dat  $\frac{7}{12}$  din ele și apoi 35% din rest. Câte timbre i-au mai rămas ?

⑤ Ip 4). Să se determine  $x \in \mathbb{N}$  știind că  $\frac{6}{2x+1} \in \mathbb{N}$ .

⑩ Ip 5). Demonstrați că fracția  $\frac{3n+4}{5n+7}$  este ireductibilă.



## Testul 2

- ⑤<sub>2p</sub> 1). Amplificați fracțiile de mai jos cu 3 : a).  $\frac{5}{6}$  ; b).  $\frac{7}{4}$ .
- ⑤<sub>2p</sub> 2). Calculați : a).  $\frac{11}{18} - \frac{7}{18}$  b).  $\frac{4}{5} + \frac{6}{5}$ .
- ⑦<sub>1p</sub> 3). Să se simplifice fracția, obținând o fracție ireductibilă :  $\frac{72}{240}$ .
- ⑦<sub>1p</sub> 4). Să se afle  $x \in \mathbb{N}$  astfel încât  $\frac{3x+2}{5+2x}$  să fie echiunitară.
- ⑨<sub>1p</sub> 5). O persoană cheltuiește într-o zi  $\frac{5}{12}$  din suma de 480 lei pe care o avea. A doua zi cheltuiește  $\frac{1}{4}$  din rest, iar a treia zi  $\frac{5}{9}$  din suma cheltuită în cele două zile la un loc. Câți lei i-au rămas ?
- ⑨<sub>1p</sub> 6). Fracțiile supraunitare de forma  $\frac{3x}{x0}$  sunt .....
- ⑩<sub>1p</sub> 7). Demonstrați că fracția :  $\frac{3 \cdot 2^{n+3} + 2^{n+2} - 2^{n+1}}{4 \cdot 6^{n+1} + 2^{n+1} \cdot 3^n}$  este subunitară, pentru orice  $n \in \mathbb{N}^*$ .

## Testul 3

- ⑤<sub>4p</sub> 1). a). Amplificați  $\frac{3}{5}$  pentru a obține o fracție cu numitorul 25; c). Simplificați :  $\frac{48}{90}$ ;  
 c). Calculați :  $\frac{12}{5} - \left( \frac{3}{5} + \frac{8}{5} \right)$ ; d). Dați exemplu de : i). fracție subunitară; ii). fracție supraunitară.
- ⑦<sub>2p</sub> 2). Să se efectueze : a).  $\frac{7}{6} - \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \right) =$  b).  $2\frac{3}{5} - \left( 3\frac{1}{10} - 2\frac{1}{2} + 1 \right) =$
- ⑨<sub>2p</sub> 3). a). Să se determine  $n \in \mathbb{N}$  dacă  $\frac{9}{2n+1}$  este supraunitară.  
 b). Să se determine  $n \in \mathbb{N}$  dacă  $\frac{3}{2n+1} \in \mathbb{N}$ .
- ⑩<sub>1p</sub> 4). Să se simplifice :  $\frac{\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}}{\overline{aaa} + \overline{bbb} + \overline{ccc}}$ .

## Fracții periodice

- \*  
 1). Să se scrie cu virgulă :  $\frac{2}{3}; \frac{7}{3}; \frac{4}{9}; \frac{13}{6}; \frac{1}{15}; \frac{10}{7}; \frac{3}{11}; \frac{5}{22}; \frac{7}{18}; \frac{25}{36}; \frac{11}{12}$   
 2). Să se transforme în fracții ordinare ireductibile : 0,(2); 0,(8); 1,(4); 0,(14); 0,(007); 3,(27); 0,5(4); 0,07(2); 0,21(02); 1,3(12); 2,05(7); 0,4(27); 1,0(21)

\*\*

- 3). Verifică-ți cunoștințele învățate calculând :

a).  $7,(3) : 11 - 0,5 =$  R :  $\frac{1}{6}$  b).  $2,(27) : 5 + 0,2 =$  R :  $\frac{36}{55}$   
 c).  $1,(45) \cdot \left( \frac{1}{2} \right)^3 + 0,3 =$  R :  $\frac{53}{110}$  d).  $1,(63) : \left( \frac{3}{11} \right)^2 - 20,4 =$  R :  $\frac{8}{5}$

e). $1,(5) + 1,4(8) =$	R : $\frac{137}{45}$	f). $3,(18) : 0,7 + \frac{1}{22} =$	R : $\frac{101}{22}$
g). $2,5(7) : 6,(4) - 0,15 =$	R : $\frac{1}{4}$	h). $[4,3(5) + 3,(8)] : 0,7 =$	R : $\frac{106}{9}$
i). $4,(6) : 3,(1) + 2,5 =$	R : 4	j). $0,15 + 1,1(3) : 3,(7) =$	R : $\frac{9}{20}$
k). $2,1(6) : 0,36(1) - 5,(3) =$	R : $\frac{2}{3}$	l). $1,(3) : 1,6 + 2,(3) =$	R : $\frac{19}{6}$
m). $6,(54) : 1,(36) - 0,4 =$	R : $\frac{22}{5}$	n). $2,(4) : 22 + 3,(7) =$	R : $\frac{44}{9}$
o). $14,(2) : 1,(93) + 3,(6) =$	R : 11	p). $0,0(81) + 1,(1) : 5,(3) =$	R : $\frac{383}{1320}$
r). $6,(4) : 9,(6) + 4,(3) =$	R : 5	s). $1,(69) : 1,(7) + 0,5 =$	R : $\frac{16}{11}$
t). $25 : 33,(3) + 2,(2) \cdot 2,4 =$	R : $\frac{73}{12}$	u). $[1,(3)]^2 : 2^4 - 0,01 =$	R : $\frac{91}{900}$
v). $0,(6) : \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 1,(3) =$	R : $\frac{1}{6}$	x). $[0,2(6) : 2^2 + 0,85] : 0,5 =$	R : $\frac{11}{6}$

\*\*\*

4). Dacă efectuezi primul exemplu, următoarele ți se vor părea ușoare :

a). $\left[0,4(6) : \frac{14}{3} + 0,4\right] : 2,5 =$	R : $\frac{1}{5}$	b). $\frac{24,2 + \frac{4}{5}}{4,(54)} =$	R : $\frac{11}{2}$
c). $\frac{0,1(3) + 0,0(5)}{5,(6)} =$	R : $\frac{1}{30}$	d). $\frac{0,(27) + 0,25}{\frac{23}{44}} =$	R : 1
e). $\frac{1,2(6)}{19} - 0,0(6) =$	R : 0	f). $\left[0,(5) \cdot 1,35 + 1,2(7) : \frac{46}{12}\right] : \frac{0,13}{0,12} =$	R : 1
g). $\left[0,(2) \cdot 1,875 + 1,(27) : \frac{7}{22}\right] : \frac{0,53}{0,12} =$			R : 1
h). $[0,1(2) + 2,(3) - 1,0(8)] : 13,(6) =$			R : $\frac{1}{10}$
i). $5,25 : 0,05 - 7,5 \cdot [2,5 + 3,(6)] + 1,25 =$			R : 60
j). $\left[0,(5) \cdot 0,72 + 1,3(6) : \frac{41}{10}\right] : \frac{0,(16)}{0,(15)} =$			R : $\frac{11}{16}$

5). Precizați, descompunând în factori primi numitorul (după ce ați simplificat fracțiile la fracții ireductibile), ce fel de fracții se vor obține (zecimale, periodice sau periodice mixte),

fără a efectua împărțirea :  $\frac{2}{3}, \frac{10}{4}, \frac{8}{30}, \frac{35}{30}, \frac{15}{24}, \frac{1}{40}, \frac{8}{11}, \frac{15}{66}, \frac{3}{14}, \frac{16}{42}, \frac{6}{35}, \frac{4}{9}, \frac{14}{40}$ .

### 6). Aflați x știind :

a).  $0,(1) \cdot x + 0,(2) \cdot x + \dots + 0,(8) \cdot x = 4,8$

R : 1,2

b).  $\overline{0,(x)} + \overline{1,(x)} + \overline{2,(x)} + \dots + \overline{9,(x)} = 48,(3)$

R : 3

c).  $\overline{0,1(x)} + \overline{0,2(x)} + \overline{0,3(x)} + \dots + \overline{0,9(x)} = 5$

R : 5

d).  $\overline{0,(1x)} + \overline{0,(2x)} + \dots + \overline{0,(9x)} = 5$

R : 5

## Testul 1

### 1). Calculați :

⑤ Ip a).  $10,6 + 2,32 = \dots\dots$

⑤ Ip b).  $5,72 - 4,3 = \dots\dots$

⑤ Ip c).  $16 - 12,48 = \dots\dots$

⑤ Ip d).  $2,8 \cdot 5 = \dots\dots$

⑦ Ip 2). Ordonati : a).  $\frac{2}{5}$ ;  $0,44$ ;  $\frac{13}{30}$  : .....

b).  $0,(1)$ ;  $0,1$ ;  $0,(12)$  : .....

⑨ Ip 3). Calculați :  $3,6 - 5 \cdot [4,3 : 0,04 - (0,6^2 \cdot 300 - 1^{2000})]$ .

⑨ Ip 4). Efectuați :  $\left\{ \left[ 2\frac{1}{3} - 0,(3) \right]^3 : \left[ \frac{19}{10} : 0,12 + 0,8(3) \right] + 0,12 \right\} \cdot 5$ .

⑩ Ip 5). Fie  $x = \left\{ [0,75 + 0,(6)] : 17 + 0,5 : \frac{1}{0,3} + 0,01(6) \right\} \cdot 48$  Să se determine diferența dintre cubul

numărului x și triplul pătratului său.

## Testul 2

### 1). Calculați :

⑤ Ip a).  $1,28 + 11,2 =$

⑤ Ip b).  $7,03 \cdot 12 =$

### 2). Aflați :

⑤ Ip a). numărul cu 5 mai mic decât 8,9.

⑤ Ip c). numărul de 7 ori mai mare decât 3,5.

⑦ Ip 3). Aflați  $x \in \mathbb{Q}$  :  $x + 0,(6) = 3 - \left( \frac{5}{4} + \frac{1}{2} \right)$

⑦ Ip 4). Calculați :  $[0,(3) + 0,5^2] + \frac{5}{12} =$

⑨ Ip 5). Aproximați rezultatul împărțirii cu o eroare de o zecime prin lipsă :  $17,32 : 1,4$ .

⑨ Ip 6).  $\left\{ 30 \cdot (1 - 0,6)^2 - \left[ 3,2 + 0,011 : \left( \frac{1}{10} \right)^2 \right] - 3 \cdot 0,5^3 \right\} : 0,5 = \dots\dots$

⑩ Ip 7). Să se calculeze  $x^2 - 69$  unde  $x = \left\{ 0,37 : \left( \frac{1}{4} + \frac{1}{40} + \frac{1}{400} \right) + \left[ 1\frac{1}{2} + 0,(3) \right] \right\} \cdot 12 - 5^2$ .

## Testul 3

1). Să se efectueze : ⑤ Ip a).  $5 - 3,17$

⑤ Ip b).  $8,19 + 2,095$

⑦ Ip c).  $5,4 : 0,18$

⑨ Ip d).  $\left( 5,2 : 6\frac{2}{4} + 1 \right)^2 : 0,9$

⑦ Ip 2). Ordonati crescător :  $\frac{7}{2}$ ;  $3\frac{3}{5}$ ;  $3,4$ .



⑨ 1p 3). Dați exemplu de  $a \in \mathbb{Q}$  care îndeplinește condiția  $\frac{3}{11} < a < \frac{4}{11}$ .

⑩ 1p 4). Să se determine  $\overline{ab}$  par, cu  $a < b$ , dacă  $40 \left( \overline{a,b} + \overline{b,a} \right)$  este pătrat perfect.

## Media aritmetică ponderată

\*\*

1). Să se calculeze media aritmetică ponderată pentru :

a). 3 și 5 cu ponderile 2 și 8    b). 3,4 și 0,5 cu ponderile 1 și 7    c). 0,8; 5,6 și 4 cu ponderile 3; 4 și 0,5

2). Să se calculeze media la matematică în următoarele cazuri :

a). note oral : 10; 9; 9; 7 și 8 în teză    )), note oral : 8; 6; 6; 5 și 7 în teză

c). note oral : 8; 7; 6 și 8 în teză    d). note oral : 8; 9; 7 și 6 în teză

3). Să se calculeze media pe clasă :

nr. elevi	2	3	3	4	8	3	5
note	4	5	6	7	8	9	10

4). Dacă amestecăm 3 kg de bomboane de 15 lei/kg cu 5 kg bomboane de 20 lei/kg, cu ce preț trebuie vândut amestecul ?

5). Ce notă trebuie să mai ia un elev care are notele 4; 5; 6; 7 și 7 în teză, dacă vrea să obțină media 7 ?

6). Un elev are notele 7, 7, 5 și nota la teză 6. Ce notă îi mai trebuie pentru a obține media 6,75 ?

7). Un automobil a mers 2 ore cu 50 km/h și 4 ore cu 60 km/h. Cu ce viteză medie a mers automobilul ?

8). Un copil a cumpărat 2 ciocolate cu 2,7 lei bucata și o ciocolată cu 2,4 lei. Cât a dat în medie pe ciocolată ?

9). Într-o clasă de 20 elevi, 5 au 1,30 m, 7 au 1,40 m și restul 1,35 m. Care este înălțimea medie ?

10). Un elev are de rezolvat patru exerciții. Un exercițiu l-a rezolvat în 5 minute, al doilea în 7 minute și două exerciții le-a rezolvat în câte 10 minute fiecare. Care a fost timpul mediu de rezolvare a unui exercițiu ?

11). Aflați două numere dacă primul este dublul celui alt și media lor aritmetică ponderată cu ponderea 3 și 7 este 3,9.

12). Media aritmetică a numerelor 3, 4, x având ponderea  $x + 1$ , 4, 8 este 10. Să se afle x.

## Ecuatii

\*

1). Fie  $A = \left\{ 0; \frac{3}{5}; \frac{2}{3}; 3; 3\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right\}$ . Care din elementele mulțimii A verifică ecuațiile de mai jos

a).  $\frac{2}{3}x + \frac{4}{5} = \frac{18}{15}$

b).  $\frac{17}{3} - \frac{1}{2}x = 5\frac{4}{6}$

c).  $\frac{4}{3} + x = 2$     d).  $x - 2\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

e).  $\left( x + \frac{2}{5} \right) \cdot \frac{10}{7} = 1\frac{6}{14}$

f).  $\left( \frac{2}{7}x - \frac{10}{14} \right) : \frac{1}{20} = 2 + 3\frac{5}{7}$

$$g). \left(x - \frac{2}{3}\right) : \frac{1}{9} = \frac{12}{5} + \frac{6}{10} \quad h). \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot x = \frac{1}{32}$$

2). Să se rezolve în Q :

$$\begin{array}{llll} a). x + \frac{1}{4} = 2 & b). 1\frac{3}{8} + x = 2 & c). x - \frac{4}{9} = \frac{1}{3} & d). \frac{5}{6} - x = \frac{1}{2} \quad e). 3\frac{1}{4} - x = 2 \\ f). x - 4 = \frac{3}{8} & g). x + \frac{3}{2} = 2 & h). 4x = \frac{1}{6} & i). 5x = 1 \quad j). 3x = 2 \\ k). \frac{2}{3}x = 4 & l). \frac{5}{6}x = 25 & m). 1\frac{1}{2}x = 3 & n). \frac{5}{8}x = \frac{15}{4} \quad o). 2\frac{1}{2}x = \frac{25}{14} \end{array}$$

\*\*\*

3). Să se rezolve în Q:

$$\begin{array}{llll} a). x : \frac{1}{4} = 3 & b). 3\frac{2}{3} : x = \frac{1}{3} & c). \frac{5}{6} : x = 8\frac{1}{3} & \\ d). \frac{3x}{5} : \frac{2}{9} = 18 & e). 9x - \frac{4}{5} = \frac{1}{2} & f). \frac{5}{4}x + \frac{2}{3} = \frac{11}{12} & \\ g). 2x + \frac{4}{3} = \frac{21}{2} & h). \frac{3}{4}x + \frac{5}{6} = \frac{17}{2} & i). x + \frac{7}{2} = \frac{3}{4} + 3\frac{1}{6} & \\ j). 8\frac{1}{6} - x = 2\frac{1}{8} \cdot 3\frac{4}{17} & k). 2\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} = \left(\frac{7}{4} - 1\frac{1}{2}\right)^2 & l). 8 : x = 5\frac{1}{3} & \\ m). \left(\frac{4}{5} - \frac{2}{3}\right) \cdot x : 3 = \frac{10}{1} & n). 4x + 3\frac{1}{2} = 4\frac{1}{3} & o). \frac{7}{2} \cdot \left(2x + \frac{2}{7}\right) = \left(1\frac{1}{2}\right)^2 & \end{array}$$

4). Rezolvați :

$$\begin{array}{llll} a). \frac{5}{4}x + \frac{1}{3}x = \frac{1}{12} & b). \frac{3}{5}x - \frac{1}{15}x = 4 & c). 4\frac{1}{2} + 3x = \frac{29}{6} & \\ d). \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x + \frac{1}{2} = 4\frac{1}{3} & e). \frac{5}{6}x + x = \frac{3}{9} & f). \frac{1}{6}x + \frac{2}{3}x - \frac{1}{12}x = \left(1 - \frac{1}{2} : 2\right)^2 & \\ g). 1\frac{3}{5}x + \frac{1}{10}x + 12 = 12 & h). \frac{7}{10}x - \frac{3}{5}x + \frac{2}{3}x = \frac{1}{1\frac{7}{23}} & & \end{array}$$

5). Să se rezolve în Q :

$$a). x - \frac{4}{3} = \frac{5}{6}x \quad b). 2x = 3 \cdot \left(\frac{x}{6} + 7\right) \quad c). \frac{1}{3} = 1 + \frac{2}{3}x + 2 \quad d). \frac{4}{3}x + 1\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{6}x = 2, (6)$$

\*\*\*

6). Să se rezolve în Q:

$$\begin{array}{llll} a). \frac{5}{6}\left(x + \frac{3}{2}\right) + \frac{1}{2}x = 4\frac{1}{3} & b). \left(3x - \frac{2}{5}\right) \cdot \frac{1}{6} + x = \frac{5}{6} & c). \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{4}{5}x + 1\right) + \frac{1}{10}x = \frac{1}{2} & \\ d). \left(3x - 2\frac{1}{2}x\right) \cdot \frac{4}{5} + \frac{3}{4} = \frac{4}{5} & e). x - \frac{2}{3}x + \frac{5}{6} = 2\frac{1}{4} & f). 1\frac{1}{3} = x + \frac{2}{9}x + \frac{1}{9}g). & \\ \left(\frac{1}{5}\right)^0 + \frac{1}{2} : 2 = \left(1\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x\right) \cdot \frac{8}{19} + \frac{1}{3}x & h). \left(2x - \frac{3}{5}x\right) \cdot \frac{2}{7} - \left(x - \frac{2}{3}x\right) = \frac{1}{5} & & \end{array}$$

$$i). 1\frac{1}{4} - \left(3x + \frac{4}{5}x\right) \cdot \frac{10}{19} = \left(2\frac{1}{2} + 3\right)^0 \quad j). 1\frac{1}{5} + \frac{1}{2} = 2\frac{2}{5}\left(x + \frac{1}{3}x\right) + \frac{1}{2}$$

7). Să se rezolve în  $\mathbb{Q}$ :

$$a). 2x + \frac{3}{4} = x + 5\frac{6}{8} \quad b). \frac{5}{8} + \frac{3}{4}x + 2x = x + 10 \quad c). \frac{1}{2}x + 3\frac{1}{4} = \frac{1}{4}x + 5$$

$$d). \frac{4}{5}\left(x + \frac{3}{2}\right) + 2\frac{1}{2} = 1\frac{2}{5}x + 1 \quad e). \frac{5}{8}x + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}x = \frac{1}{2}x + 4 \quad f). \frac{2}{5}x - \frac{1}{8} = x - \frac{3}{4}x$$

$$g). 2\frac{1}{4}x + 1\frac{2}{3} + \frac{4}{5}x = 1\frac{3}{4}x + 2 \quad h). \frac{9}{5}x - \frac{8}{10}x + 2\frac{1}{3} = 1\frac{7}{9}x \quad i). 2\frac{1}{2}x + \frac{3}{8} = x + 4$$

$$j). \frac{5}{7} \cdot \left(\frac{2}{3}x + \frac{1}{2}x\right) = \frac{2}{3}x + \frac{1}{12} \quad k). \frac{4}{5}x + 1\frac{1}{2} = \frac{1}{10}x + 19\frac{1}{2} \quad l). \frac{1}{3}x - 3 = \frac{1}{6}x$$

$$m). x - \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x\right) = \frac{1}{12}x + \frac{4}{6} \quad n). \frac{2}{3}x + \frac{13}{6} = x + 1\frac{1}{4}x - 1 \quad o). \frac{2}{5}x + 12 = x$$

$$p). x - 5 = \frac{1}{19}\left(1\frac{2}{3}x + 1\frac{1}{2}x\right) \quad r). 3\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{3}x = x + \frac{1}{6}x$$

## Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor

1). În dulapul cu jucării al Ioanei sunt 36 jucării din plus.  $\frac{1}{9}$  sunt ursuleți,  $\frac{2}{6}$  sunt șoriceți,  $\frac{1}{4}$  sunt pisicuțe, iar restul sunt rățuște. Câte rățuște din plus are Ioana?

2). La un concurs de matematică au participat 90 de elevi.  $\frac{1}{15}$  din numărul total au luat premiul I;  $\frac{1}{30}$  au luat premiul al II-lea, iar  $\frac{1}{9}$  din cei rămași au luat premiul al III-lea. Câte premii s-au acordat?

3). Într-un depozit sunt 900 kg de mere. În prima zi s-au vândut  $\frac{2}{15}$  din întreaga cantitate, a doua zi  $\frac{2}{10}$  din cantitatea rămasă. Câte kg de mere au rămas în depozit, dacă în a treia zi s-au vândut 135 kg mere?

4). Cât grâu e necesar pentru a obține 60 kg de făină, dacă ea reprezintă  $\frac{4}{5}$  din grâul care s-a obținut?

5). Într-un butoi sunt 96 l de vin. Se scot  $\frac{3}{4}$  din cantitatea de vin și apoi  $\frac{4}{6}$  din cantitatea rămasă. Câți litri de vin au mai rămas în butoi?

6). Un turist străbate 210 km. Cu trenul străbate  $\frac{3}{7}$  din distanță, cu autobuzul  $\frac{7}{10}$  din distanța rămasă. Câți kilometri a străbătut cu bicicleta?

7). Să se afle un număr dacă:

$$a). \frac{2}{5} \text{ din el fac } 8? \quad b). \frac{1}{6} \text{ din el fac } 1\frac{5}{12}? \quad c). 2\frac{3}{5} \text{ din el fac } \frac{39}{15}?$$

8). Aflați  $x$  dacă:

$$a). \frac{2}{3} \text{ din } x \text{ este } 16 \quad b). \frac{5}{6} \text{ din } x \text{ este } 25 \quad c). \frac{4}{3} \text{ din } x \text{ este } 20$$



9). Să se afle  $x$  știind că :

- a).  $\frac{4}{9}$  din  $x$  reprezintă  $\frac{1}{2}$  din 54      b).  $2\frac{1}{7}$  din  $x$  reprezintă  $\frac{2}{5}$  din 50  
c).  $\frac{5}{6}$  din  $\frac{8}{15}$  din  $x$  este 20      d).  $1\frac{3}{7}$  din  $\frac{14}{25}$  din  $x$  este cel mai mic număr prim impar

10). a) Să se afle un număr rațional știind că adunat cu  $3\frac{1}{8}$  dă 5.

b). Să se afle un număr rațional știind că dacă scădem  $1\frac{3}{5}$  din el obținem  $3\frac{1}{8}$ .

c). Să se afle un număr rațional dacă triplul său este  $8\frac{1}{9}$ .

d). Să se afle un număr rațional dacă o treime din el este  $\frac{1}{6}$ .

e). Să se afle un număr rațional dacă adunat cu  $1\frac{3}{4}$  obținem triplul său.

11). a). Să se afle două numere raționale a căror sumă este  $30\frac{1}{2}$  și unul este cu  $\frac{3}{8}$  mai mare decât celălalt.

b). Câți bani a avut un elev dacă cheltuiește  $2000\frac{1}{2}$  lei, iar mama îi dă cât a avut inițial și acum are 10000 lei?

12). Ce sumă a avut o persoană dacă a cheltuit 1673 lei adică  $\frac{7}{8}$  din suma lui?

13). Într-o clasă  $\frac{2}{3}$  din numărul elevilor sunt fete. Câți elevi sunt dacă sunt 24 de fete?

14). Un elev a rezolvat 12 exerciții ceea ce reprezintă  $\frac{6}{7}$  din temă. Câte exerciții are tema?

15). Un tractorist a arat 324 ha ceea ce reprezintă  $\frac{4}{11}$  din teren. Câte ha are terenul?

16). Smântâna reprezintă  $\frac{2}{9}$  din cantitatea de lapte. Cât lapte e necesar pentru a prepara 4 kg smântână?

17). Făina reprezintă  $\frac{11}{12}$  din cantitatea de grâu. Ce cantitate de grâu e necesară pentru a obține 33 kg făină?

18). Un om a cheltuit  $\frac{2}{3}$  din banii săi și i-au mai rămas 700 lei. Câți bani a avut și câți bani a cheltuit?

19). Un drumeț a mers 12 km și i-au mai rămas  $\frac{4}{7}$  din drum. Câți km are drumul și câți km i-au mai rămas?

20). Într-o clasă sunt  $\frac{3}{5}$  din elevi băieți și 12 fete. Câți elevi sunt și câți băieți?

21). Un elev a rezolvat 15 exerciții și i-au mai rămas  $\frac{1}{6}$  din temă. Câte exerciții a avut tema și câte exerciții i-au mai rămas?

22). Într-o clasă  $\frac{1}{11}$  din elevi sunt corijenți și 30 elevi sunt promovați. Câți elevi are clasa și câți sunt corijenți?

23). Un elev a cumpărat un caiet pe care a dat  $\frac{2}{15}$  din banii săi și un stilou care a costat  $\frac{4}{9}$  din bani. Știind că i-au mai rămas 19 lei, aflați câți bani a avut elevul.

24). Un teren este cultivat astfel :  $\frac{3}{7}$  din el cu grâu,  $\frac{2}{5}$  din teren cu porumb și restul de 720 ha cu floarea soarelui. câte ha are terenul?

25). Dintr-un depozit s-a scos astfel : în prima zi  $\frac{1}{5}$  din cantitate, a doua zi  $\frac{1}{4}$  din rest și au mai rămas 1800 kg. Ce cantitate era la început în depozit?

- 26). Doi frați au împreună 21 de ani. Vârsta unuia este  $\frac{3}{4}$  din vârsta celuilalt. Să se afle vârsta fiecăruia.
- 27). Diferența a două numere naturale este 24. Să se afle numerele știind că unul este  $\frac{5}{6}$  din celălalt.
- 28). Suma dintre  $\frac{1}{2}$  și  $\frac{1}{6}$  ale aceluiași număr este 420. Să se afle numărul.
- 29). Într-un atelier s-au executat doar  $\frac{2}{7}$  din 1960 de paltoane câte trebuiau să fie executate. Câte paltoane au mai rămas de executat ?
- 30). Un grup de turiști au parcurs în prima zi  $\frac{2}{9}$  din tot drumul pe care îl aveau de parcurs, a doua zi 270 km ceea ce reprezintă  $\frac{3}{5}$  din tot drumul, iar a treia zi restul. Câți km au parcurs în ultima zi ?
- 31). Într-o clasă de 36 de elevi,  $\frac{2}{3}$  din ei merg la muzeu și  $\frac{3}{4}$  din ei merg la teatru. Care este cel mai mic și care este cel mai mare număr de elevi, care ar fi putut merge și la muzeu și la teatru ?
- 32). Fiecel mai mic număr natural de ordinul sutelor divizibil cu 6. Aflați suma dintre  $\frac{1}{2}$  și  $\frac{3}{17}$  ale celui număr.
- 33). Un drumeț a mers  $\frac{3}{7}$  din drum și mai are 10 km până ajunge la jumătatea drumului. Câți km are drumul ?
- 34). Un om a cheltuit  $\frac{4}{9}$  din banii săi și dacă mai cheltuiește 1500 lei îi mai rămâne jumătate din sumă. Ce sumă a avut la început ?
- 35). Un muncitor a făcut  $\frac{4}{10}$  din normă și dacă mai face 112 piese îi mai rămâne de făcut  $\frac{1}{3}$  din normă. Câte piese are norma ?
- 36). Un țăran a arat  $\frac{3}{5}$  din teren în prima zi,  $\frac{1}{3}$  din rest a doua zi și i-au mai rămas de arat 456 ha. Câte ha are terenul ?
- 37). a). Să se afle un număr știind că  $\frac{3}{10}$  din el este cu 20 mai mare decât  $\frac{1}{5}$  din el. b). Un turist a parcurs în 2 zile distanța dintre două orașe astfel : în prima zi  $\frac{1}{2}$  din tot drumul și încă 24 km și a doua zi restul adică o distanță de 3 ori mai mică decât în prima zi. Ce lungime are drumul ?
- 38). Dintr-un bidon cu lapte s-au consumat 16 l care reprezintă  $\frac{4}{5}$  din întreaga cantitate. Câți litri de lapte au fost la început în bidon ?
- 39). Cătălina are 6 ani, adică  $\frac{2}{10}$  din vârsta mamei, iar mama are  $\frac{2}{4}$  din câți ani are bunica. Câți ani va avea bunica peste 10 ani ? Dar mama ?
- 40). Un călător vrea să parcurgă un drum în 9 zile, mergând la fel zilnic. Ce fracție din drum a făcut după 5 zile ?
- 41). Un elev a făcut  $\frac{3}{7}$  din tema de vacanță și i-au mai rămas 40 de exerciții. Câte exerciții are tema ?

## Testul 1

- 1). Efectuați : ⑤ l p a).  $\frac{3}{4} + 2, (3) =$  ⑤ l p b).  $\frac{5}{8} \cdot 1\frac{1}{3} + 0,5 =$  ⑦ l p c).  $\frac{7}{3} - 0,4 \cdot \left(\frac{14}{48} - \frac{15}{54}\right) : 0,1 =$
- 2). Dacă : ⑦ l p a).  $\frac{x}{2} + 3,5 = 4$  atunci  $x = \dots\dots$  ⑤ l p b).  $\frac{17}{3} - x = 0, (3)$  atunci  $x = \dots\dots$
- ⑦ l p c).  $2x + \frac{1}{2} = 4$  atunci  $x = \dots\dots$  ⑨ l p d).  $\frac{x+1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{x}{4}$  atunci  $x = \dots\dots$

⑩1p 3). Dacă  $n \in \mathbb{N}$  și  $n < \frac{15}{4} < n+1 \Rightarrow n = \dots\dots$

⑨1p 4). Ordonăți crescător:  $\frac{5}{8}; \frac{3}{4}; 0; (6); \frac{7}{10}$ .

## Testul 2

③2p 1). Rezultatul calculului  $\frac{2}{5} + \frac{1}{10} - \frac{1}{4}$  este .....

2). Să se afle  $x$  dacă: ⑤1p a).  $x + 0,15 = 2$

⑤1p b).  $x : 0,1 = 2$

⑨1p c).  $\frac{x+1}{3} + \frac{x}{2} = 1\frac{1}{6} - x$

⑦1p 3). Valoarea de adevăr a propoziției: „Numărul  $\left(1\frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{2}{3}\right)^2 \cdot (0,5)^2$  este număr prim” este .....

⑦1p 4). Dacă  $\frac{2}{3}x + 1\frac{2}{3} = 5\frac{1}{6}$ ,  $x \in \mathbb{Q}$ , atunci  $x = \dots\dots$

⑨1p 5). Să se compare numerele:  $x = \left[\left(\frac{3}{4}\right)^2 - 0,25\right] \cdot \frac{5}{6}$  și  $y = 0,75 + 0,5 - \frac{1}{12} + 0,8(3)$

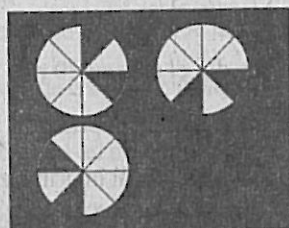
⑩1p 6). Fie  $a = \frac{2^{4n} \cdot 5^{2n+2} + 800^n}{25^{n+1} + 50^n}$ . Să se arate că numărul  $a$  este pătrat perfect, pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .



1). O sticlă conține 12 litri de suc, care trebuie transferat în zece sticle de 1 și 2 litri, câte sticle de 1 litru și câte sticle de 2 litri trebuie?

2). Un produs se ieftinește cu 20% pentru o perioadă de o lună. Apoi producătorii vor să-l aducă la prețul inițial. Cu cât la sută trebuie să se mărească prețul redus pentru a-și îndeplini obiectivul?

3). Ce figură lipsește?



4). O femeie bea 1 litru de cafea în 21 de zile, dacă bea și soțul ei, vor termina 1 litru în 14 zile. În cât timp bea soțul ei aceeași cantitate de cafea?

5). Un câine a văzut un iepure la 150 de m în fața lui. Dacă iepurele face 500 m într-un minut iar un câine 1300 m în 2 minute, după cât timp va prinde câinele iepurele?

6). Ai cumpărat o carte cu 55 lei și încă jumătate din valoarea cărții. Cât valorează cartea?

7). În prima zi a unei excursii un biciclist parcurge jumătate din drum, a doua zi o treime din drum, iar a treia zi 40 km, care este lungimea drumului?

8). În 18 farfurii sunt 3 tipuri de fructe, în fiecare farfurie este un singur tip de fruct. Putem spune că sunt 7 farfurii cu același tip de fruct?

9). Un autobuz a făcut  $\frac{3}{8}$  din distanța dintre două orașe, până la jumătate mai are 12 km, care este distanța dintre orașe?

10). De câte ori trece indicatorul de minute peste indicatorul de oră la un ceas de mână într-o zi?

11). Dacă ai citit jumătate din carte și încă 20 pagini, dar mai ai de citit încă o treime, câte pagini are cartea?



**Capitolul IV**  
**MODELE DE LUCRĂRI SEMESTRIALE**  
**SEMESTRUL I**

**Testul 1**

**Partea I**

1). Găsiți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții :

a).  $D_{24} \cap D_{16} = D_8$

b). Complementul unghiului de  $17^\circ 30'$  are  $83^\circ 30'$ .

c).  $(162; 120) = 6$

A, B, C, D sunt patru puncte coliniare, în această ordine.

d).  $AB + CD = AD$

e).  $AD - AC = CD$

f).  $AB + BD = AD$

2). Completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate :

a). Dacă  $(5x; 6) = 2$  atunci  $x \in \{.....\}$ .

b). Două unghiuri opuse la vârf sunt complementare. Atunci măsura unuia dintre ele este de .....

c). Mijlocul unui segment este .....

**Partea a II-a**

La următoarele probleme se cer rezolvări complete.

3). Calculați : a).  $2\frac{1}{3} : 3,5 + 0,3 =$  b).  $\left(\frac{15}{20} - 0,5\right) : \frac{1}{2} =$

4). Rezolvați în  $\mathbb{Q}$  : a).  $2\left(x + \frac{3}{4}\right) + \frac{1}{2} = 7 + x$  b).  $\frac{x+1}{2} - \frac{3}{8} = \frac{x}{3}$

5). Determinați numerele care îndeplinesc condiția  $\overline{x3y} : 18$ .

6). Aflați măsurile a cinci unghiuri în jurul unui punct, dacă sunt numere consecutive pare.

7). Demonstrați că  $(9^n \cdot 2^{n+1} + 6^{n+2} \cdot 3^n - 18^n) : 37$ .

8). Fie  $\angle AOB$  și  $\angle BOC$  unghiuri adiacente suplementare a căror diferență este  $140^\circ$ . Se duce bisectoarea (OE a  $\angle AOB$  și (OF semidreapta opusă bisectoarei.

a). Aflați  $m(\angle AOB)$  și  $m(\angle BOC)$ ;

b). Aflați  $m(\angle AOF)$ .

**Testul 2**

**Partea I**

1). Găsiți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții :

a). Toate numerele prime sunt impare.

b).  $[4; 6; 8] = 48$

c). Card  $D_{20} = 6$

d). Suplementul unghiului de  $117^\circ$  are  $63^\circ$ .

e).  $\frac{7}{8} > \frac{6}{7}$

f). Sfertul unghiului de  $37^\circ 7'$  are  $9^\circ 16' 45''$ .

2). Completați spațiile libere, pentru a obține propoziții adevărate :

a). Dublul lui  $3^\circ 58' 47''$  are .....

b). Două numere se numesc prime între ele dacă .....

c). Se numește bisectoarea unui unghi o semidreaptă care .....

## Partea a II-a

La următoarele probleme se cer rezolvări complete.

3). Calculați : a).  $3 - 2\frac{1}{3} =$  b).  $\left[1,1(6) - \frac{2}{3}\right] \cdot 3, (3) =$

4). Rezolvați în  $\mathbb{Q}$  : a).  $2\left(\frac{2}{3}x - 1\right) - \frac{1}{2} = \frac{x}{6}$  b).  $\frac{x-1}{2} = 3 + \frac{x}{8}$

5). Aflați cel mai mare număr de forma  $\overline{5x2y} : 36$ .

6). Măsura unui unghi este de 4 ori mai mare decât a complementului său. Aflați măsura unghiului.

7). Demonstrați că  $(2^n \cdot 5^n - 1^n)$  nu este număr prim oricare ar fi  $n \in \mathbb{N}$ .

8). Fie  $\angle AOB$  și  $\angle AOC$  unghiuri neadiacente complementare iar  $m(\angle AOB) = 50^\circ$ .

a). Aflați  $m(\angle BOC)$

b). Dacă  $OE$  și  $OF$  sunt bisectoarele  $\angle AOB$  și  $\angle AOC$ , aflați  $m(\angle EOF)$ .

## Testul 3

### Partea I

Calculați :

1).  $\frac{5}{2} + \frac{1}{8}$

2).  $\frac{7}{16} - \frac{5}{24}$

3).  $1\frac{1}{5} : \frac{12}{25} - 1,75$

4). Scrisă sub formă ireductibilă, fracția  $\frac{72}{81}$  se scrie .....

5). Suplementul unghiului de  $74^\circ 15' 58''$  are măsura de .....

6). Dacă  $\overline{71x} : 4$  atunci  $x \in \{\dots\}$ .

7). Segmentul AB are lungimea de 12 cm. Punctul M reprezintă mijlocul lui AB. Lungimea segmentului BM este egală cu .....

8). Calculând 32% din 450 se obține .....

### Partea a II-a

La următoarele probleme se cer rezolvări complete.

9). Calculați :  $\left[ 1\frac{1}{4} + 0,5^2 \cdot \left( 2 + \frac{2}{5} \right) + \left( \frac{1}{6} \right)^2 : \frac{1}{9} \right] : 0,2$ .

10). Se consideră punctele A, B, C, D (în această ordine) astfel încât AB = 6 cm, BC = 12 cm și AD = 20 cm. Să se afle distanța dintre mijlocul segmentului AD și punctul C.

11). Unghiurile  $\angle AOB$  și  $\angle BOC$  sunt adiacente suplementare iar  $m(\angle AOB) = 80^\circ$ . Dacă (OM este bisectoarea  $\angle BOC$ , să se afle  $m(\angle CON)$  unde (ON este opusă semidreptei (OM).

### Testul 4

#### Partea I

1). C.m.m.d.c. al numerelor 680; 306; 816 este numărul .....

2). Cel mai mare număr de forma  $\overline{52x} : 6$  este .....

3). Calculând  $96^\circ 14' - 84^\circ 27' 36''$  se obține .....

4). Dacă punctul B aparține segmentului AC astfel încât AB = 6 cm și BC = 8 cm atunci AC = .....

5). Calculând  $2\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$  se obține .....

6). Valoarea de adevăr a propoziției „ $(50; 77) = 1$ ” este .....

7). Frația  $\frac{15}{x+2} \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{N}$  pentru  $x \in \{\dots\}$ .

8). Ordonând crescător numerele 3,23(7); 3,(237); 3,2(37) se obține .....

#### Partea a II-a

La următoarele probleme se cer rezolvări complete.

9). Dacă  $(a; b) = 7$  și suma  $a + b = 84$ , să se afle cele două numere a și b,  $a, b \in \mathbb{N}^*$ .

10). Fie unghiurile  $\angle AOB$  și  $\angle AOC$  neadiacente cu măsurile de  $23^\circ$  respectiv  $84^\circ$ . Să se afle măsura unghiului format de bisectoarea  $\angle AOB$  cu semidreapta (OC).

11). Punctele M; N și P aparțin segmentului AB astfel încât AB = 32 cm, AM = 12 cm, BN = 18 cm iar PB = 50% BN. Să se calculeze lungimea segmentului MP.



# **Capitolul V** **RAPOARTE ȘI PROPORȚII** **Raport**



## **NOȚIUNI DE BAZĂ**

- raportul a două numere a și b se notează  $\frac{a}{b}$ ;
- numerele a și b sunt termenii raportului;
- prin valoarea raportului  $\frac{a}{b}$  se înțelege rezultatul împărțirii lui a la b;
- raportul măsurilor a două mărimi exprimate prin aceeași unitate de măsură este raportul numerelor prin care se exprimă cele două mărimi.

## **EXERCITII**

**\*\***

1) Să se afle valorile rapoartelor numerelor :

a). 3 și 5                      b). 10 și 4                      c). 15 și 2                      d). 18 și 36

e). 0,1 și 0,5                      f). 0,02 și 0,4                      g).  $0,3^2$  și  $0,2^2$                       h).  $\frac{1}{2}$  și 2

i).  $\frac{3}{9}$  și  $\left(1\frac{1}{2}\right)^{2*}$                       j). 0,(5) și 0,2                      k).  $\left(\frac{1}{8}\right)^2$  și  $\left(\frac{1}{6}\right)^2$                       l).  $1\frac{1}{2}$  și  $2\frac{3}{4}$

2). Să se afle primul termen al raportului dacă :

a). valoarea raportului este 5 și al doilea termen este 3;

b). valoarea raportului este 1,2 și al doilea termen este  $1\frac{2}{3}$ ;

c). valoarea raportului este 0,4 și al doilea termen este dat de expresia :  $E = \left(\frac{1}{2} + 0, (3) : \frac{1}{6}\right)^2 \cdot 1\frac{3}{5}$

3). Să se afle al doilea termen al raportului, dacă primul termen este :

a). 20,4 și valoarea raportului este 5,1;

b). c.m.m.m.c. al numerelor 6, 8 și 15 iar valoarea raportului este 0,(15);

c). cel mai mare număr care divide numerele 24, 36 și 60 iar valoarea raportului este 0,3.

4). Se consideră un dreptunghi cu lățimea de 6 cm și valoarea raportului dintre lungime și lățime este 2,5. Să se afle perimetrul și aria lui.

5). Un dreptunghi are lungimea de 14 cm și lățimea cu 4 cm mai mică decât lungimea. Aflați :

a). raportul dintre lungime și lățime;

b). raportul dintre lățime și lungime;

c). raportul dintre perimetru și lungime;

d). cunoașteți și raportul dintre perimetru și suma celor două dimensiuni fără a efectua calculele?

6). Un dreptunghi are lungimea de 12 m iar lățimea este o treime din lungime și un alt

dreptunghi are lățimea de 2,4 dam iar lungimea este  $1\frac{1}{3}$  din lățime. Să se afle :

a). raportul dintre lungimea și lățimea primului dreptunghi;

b). raportul dintre lungimea și lățimea celui de-al doilea dreptunghi;

c). de câte ori este mai mare aria celui de-al doilea dreptunghi față de aria primului;

d). raportul perimetrelor celor două dreptunghiuri.

7). Să se afle valoarea raportului dintre numărul natural de forma  $\overline{xy10x}$  divizibil cu 6 și numărul natural de forma  $\overline{2yy}$  divizibil cu 36.

8). a). Dacă a este egal cu o cincime din b, să se afle raportul a/b;

b). Dacă a este de 4 ori mai mare decât b, aflați rapoartele a/b și b/a;

c). Dacă a este de 3 ori mai mic decât b, aflați rapoartele a/b și b/a.

- 9). a). Dacă raportul dintre a și b este  $\frac{3}{8}$ , care va fi raportul dintre b și a ?  
 b). Dacă  $a/b = 1/4$ , aflați  $b/a$ ;  
 c). Dacă  $a/b = 2$ , aflați  $b/a$ .  
 10). Dacă raportul laturilor a două pătrate este  $\frac{3}{5}$ , care este raportul perimetrelor ? Dar raportul ariilor ?  
 11). Dacă raportul ariilor a două pătrate este  $\frac{1}{4}$ , aflați raportul laturilor.  
 12). Dacă se știe  $a/b = \frac{2}{3}$  și  $b/c = \frac{6}{7}$ , aflați rapoartele  $a/c$  și  $c/a$ .  
 13). Dacă  $a/b = \frac{3}{5}$  și  $a/c = \frac{2}{3}$ , aflați  $b/c$ .  
 14). Să se afle valoarea raportului ariilor a două dreptunghiuri care au raportul lungimilor  $\frac{2}{5}$  iar raportul lăților  $\frac{3}{4}$ .  
 15). Care este raportul lungimilor a două dreptunghiuri, dacă raportul ariilor lor este  $\frac{16}{7}$  iar raportul lăților este  $\frac{4}{3}$  ?  
 16). Raportul numerelor a și b este  $\frac{3}{5}$ . Cu cât va fi egală valoarea raporturilor  $a/b$ , dacă numărul a se mărește de 0,8 ori, iar numărul b se micșorează de 5 ori ?



## Proportie. Proprietatea fundamentală a proporției

### NOTIUNI DE BAZĂ

- proporția este o egalitate a două rapoarte;
- orice proporție are patru termeni :  $\frac{\text{extrem}}{\text{mez}} = \frac{\text{mez}}{\text{extrem}}$
- în orice proporție produsul extremilor este egal cu produsul mezilor;

### EXERCITII

\*

1). Verificați dacă următoarele rapoarte formează proporții :

- a).  $\frac{2}{5} = \frac{8}{20}$     b).  $\frac{7}{3,5} = \frac{14}{7}$     c).  $\frac{1}{3} = \frac{2}{5}$     d).  $\frac{4}{18} = \frac{2}{9}$     e).  $\frac{6}{0,1} = \frac{0,6}{1}$   
 f).  $\frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{6}$     g).  $\frac{\frac{5}{10}}{\frac{2}{25}} = \frac{2}{25}$     h).  $\frac{\frac{2}{6}}{\frac{1}{8}} = \frac{5}{17}$     i).  $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{6} : 2 = \left(\frac{1}{2}\right)^3$

2). Să se verifice care dintre rapoartele de mai jos formează proporții cu raportul  $\frac{3}{5}$  :

- a).  $\frac{2}{4}$     b).  $\frac{6}{10}$     c).  $\frac{7}{3}$     d).  $\frac{21}{35}$     e).  $\frac{0,2}{\frac{1}{3}}$     f).  $\frac{2^4 - 4}{5^2 - 5}$

\*\*

3). Folosiți următoarele rapoarte pentru a forma proporții :  $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{4}{8}, \frac{6}{3}, \frac{9}{12}, \frac{3}{6}, \frac{4}{2}, \frac{0,12}{0,06}, \frac{0,25}{0,3}$

4). Să se formeze proporții cu următoarele numere :

- a). 2; 3; 4; 6    b). 3; 4; 6; 8    c). 4; 5; 12; 15    d). 2; 24; 6; 8    e). 2; 5; 6; 15  
 f). 4; 6; 8; 12    g). 3; 9; 16; 48    h). 4; 12; 12; 36    i). 0,12; 40; 0,6; 8    j). 0,7; 1/21; 1/9; 0,3

5). Știind că :

- a).  $2 \cdot x = 5 \cdot y$ , aflați raportul  $x/y$ ;  
 b).  $(6 + 2^3) \cdot a = 7 \cdot b$ , aflați raportul  $b/a$ ;  
 c).  $(1 - 3/4) \cdot x = 1/2^3 \cdot y$ , aflați raportul  $x/y$ ;  
 d).  $0,3 \cdot a^2 = 30 \cdot b^2$ , aflați rapoartele  $a^2/b^2$ ,  $a/b$ .  
 6). Fie proporția :  $a/18 = b/a$ . Știind că b este cel mai mic număr prim, să se afle a.  
 7). Fiind dată proporția  $a/b = c/d$ , să se afle 5 ad, dacă b = 3 iar c este de 4 ori mai mare decât b.

8). Fiind dată proporția  $\frac{3}{a} = \frac{b}{9}$ , aflați raportul  $\frac{a \cdot b}{a \cdot b + 3}$

9). Fiind dată proporția  $\frac{5}{a} = \frac{b}{12}$ , simplificați fracția, transformând-o în fracție ireductibilă  $\frac{a \cdot b}{90}$

10). Fiind dată proporția  $\frac{a}{4} = \frac{5}{b}$ , simplificați fracția, transformând-o în fracție ireductibilă  $\frac{ab + 4}{32}$

## Aflarea unui termen necunoscut al unei proporții



### NOTIUNI DE BAZĂ

- un extrem =  $\frac{\text{produsul mezilor}}{\text{celalalt extrem}}$

- un mez =  $\frac{\text{produsul extremilor}}{\text{celalalt mez}}$

### EXERCITII

\*

1). Să se afle x din proporțiile :

a).  $\frac{4}{3} = \frac{x}{9}$

b).  $\frac{2}{3} = \frac{10}{x}$

c).  $\frac{4}{x} = 8$

d).  $\frac{2}{x} = \frac{10}{15}$

e).  $\frac{x}{3} = 5$

f).  $\frac{3}{x} = 2,4$

g).  $\frac{x}{18} = \frac{4}{9}$

h).  $2 = \frac{9}{x}$

i).  $\frac{0, (15)}{x} = 2,5$

\*\*

2). Să se afle x din proporția :

a).  $\frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{6}{x}$

b).  $\frac{1}{0,6} = \frac{x}{0,2}$

c).  $\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}}{x} = \frac{6}{7}$

d).  $\frac{\frac{2}{5}}{x} = \frac{1}{10}$

e).  $\frac{0, (3)}{0,0(5)} = \frac{x}{2\frac{1}{6}}$

f).  $\frac{15 : \frac{5}{3}}{2^3} = \frac{x}{\frac{1}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{3}\right)}$

g).  $\frac{1\frac{1}{2}}{\frac{2}{x}} = \frac{4}{0,2}$

h).  $\frac{1,2}{0, (6)} = \frac{0,18}{x}$

3). Să se afle x din proporțiile :

a).  $\frac{\frac{x}{2}}{3\frac{1}{3}} = \frac{1\frac{1}{2}}{9}$

b).  $\frac{2x + \frac{3}{4}}{6} = \frac{5}{3 + 4\frac{1}{2}}$

c).  $\frac{x+2}{5} = \frac{3+2^2}{7}$

d).  $\frac{x+1}{6} = 27$

e).  $\frac{72}{240} = \frac{x+1}{10}$

f).  $\frac{4x-7}{6} = \frac{8}{48}$

g).  $\frac{3x-1}{15} = \frac{4}{12}$

h).  $\frac{x + \frac{1}{2}}{\frac{5}{6}} = \frac{2 + \frac{1}{2}}{3}$

i).  $\frac{16}{2x+1} = \frac{48}{27}$

j).  $\frac{24}{8} = \frac{15}{2x+3}$

4). Să se afle x :

a).  $\frac{1}{\frac{5}{4}} + \frac{3}{10} = \frac{2^5 : (2^2)^2 + 0,25}{\frac{3}{8}x}$

b).  $\frac{\left(15^0 + 2\frac{1}{3}\right) : \frac{5}{6}}{2^3 : 2 - 3} = \frac{4x}{12 - 10^7 : 10^6}$



$$\begin{aligned} \text{c). } \frac{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) : \frac{1}{10}}{\frac{2}{3}x} &= \frac{1}{2} & \text{d). } \frac{\frac{1}{7} - \frac{1}{14} + \frac{3}{28}}{\frac{5}{8}x} &= \frac{1\frac{2}{3}}{\left(1\frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right)} & \text{e). } \frac{\frac{1}{12} - \frac{1}{36}}{\left(2^3\right)^5 : 2^{13}} &= \frac{\frac{1}{3}x}{\frac{1}{2} + 0,5} \end{aligned}$$

\*\*\*

5). a). Să se afle  $x$  din :  $\frac{\overline{1a}}{x} = \frac{4^2 - 6}{15}$ , știind că  $\overline{1a}$  se divide cu 9.

b). Să se afle  $x$  din :  $\frac{x}{2a} = \frac{6^2 - 3^0}{56}$ , știind că  $\overline{2a}$  se divide cu 6.

c). Să se afle  $x$  din :  $\frac{x}{240} = \frac{x}{8^2 + 8^0}$ ,  $a$  fiind cel mai mare număr de două cifre divizibil cu 6.

d). Să se afle  $x$  din :  $\frac{x}{a} = \frac{0,13(2)}{119}$ ,  $a$  fiind cel mai mare număr de trei cifre divizibil cu 15.

e). Să se afle  $x$  din :  $\frac{a}{x} = \frac{63}{4b}$ ,  $a$  fiind cel mai mare număr prim de o cifră și  $\overline{4b}$  divizibil cu 9.

6). Să se afle  $x$  din proporțiile :

a).  $\frac{\left(\frac{4}{7} - \frac{1}{28}\right) : 3}{2x} = \frac{2^{75} + 2^{75} + 2^{75}}{3 \cdot 2^{78}}$

b).  $\frac{2^{80} + 2^{80}}{2^{79} + 2^{79}} = \frac{x}{6 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)}$

c).  $\frac{5 \cdot 9^{73} + 5 \cdot 9^{73}}{10 \cdot 9^{71}} = \frac{9x}{15}$

d).  $\frac{3x}{\frac{4}{3} + \frac{1}{6}} = \frac{(2^{15} \cdot 3^{25})^{10} : 9^{125}}{(2^7)^{15} \cdot 2^{40} \cdot 8}$



#### NOTIUNI DE BAZĂ

### Proporții derivate

1).  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$

2).  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$

4).  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a \cdot f}{b \cdot f} = \frac{c}{d}$

5).  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a : f}{b : f} = \frac{c}{d}$

7).  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a : f}{b} = \frac{c : f}{d}$

8).  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a}{b \cdot f} = \frac{c}{d : f}$

10).  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d}$

11).  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$

13).  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c}$

14).  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a+c}{b+d}$

3).  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$

6).  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a \cdot f}{b} = \frac{c \cdot f}{d}$

9).  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a}{b \cdot f} = \frac{c}{d : f}$

12).  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$

15).  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \rightarrow \frac{a}{b} = \frac{a-c}{b-d}$

### EXERCITII

\*

1). a). Să se scrie proporțiile derivate cu aceiași termeni ce se obțin din proporția :  $\frac{2}{5} = \frac{14}{35}$

b). Să se scrie 8 proporții derivate cu termeni schimbați ce se obțin din proporția :  $\frac{20}{48} = \frac{60}{144}$

\*\*

2). Știind că :

a).  $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ , aflați  $\frac{2x}{2x+5y}$ ;

b).  $\frac{x}{y} = \frac{4}{5}$ , aflați  $\frac{3x+2y}{2y}$ ;

c).  $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$ , aflați  $\frac{4x-5y}{5y}$

$$d). \frac{x}{y} = \frac{2}{11}, \text{ aflați } \frac{5y}{3x+5y};$$

$$e). \frac{x}{y} = \frac{2}{7}, \text{ aflați } \frac{5x}{3y-5x};$$

$$f). \frac{x}{y} = \frac{1}{3}, \text{ aflați } \frac{2y-4x}{4x}$$

3). Dacă :

$$a). \frac{2x+4y}{4y} = \frac{14}{8}, \text{ aflați } \frac{x}{y};$$

$$b). \frac{7x}{8y-7x} = \frac{7}{9}, \text{ aflați } \frac{y}{x};$$

$$c). \frac{2x+3y}{2x+4y} = \frac{13}{16}, \text{ aflați } \frac{x}{y};$$

$$d). \frac{5x+3y}{2x+3y} = \frac{58}{34}, \text{ aflați } \frac{y}{x};$$

$$e). \frac{7x+2y}{4x+7y} = \frac{11}{18}, \text{ aflați } \frac{x}{y}.$$

4). Folosind proporțiile derivate, să se afle  $x$  din proporțiile :

$$a). \frac{x+1}{x} = \frac{6}{5}$$

$$b). \frac{4x+2}{15} = \frac{4x}{14}$$

$$c). \frac{2x}{10} = \frac{3x+1}{16}$$

$$d). \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{8x}{10x+5}$$

5). Suma a două numere este 64 iar raportul lor este  $7/9$ . Să se afle numerele.

6). Să se afle două numere dacă diferența lor este 18 și raportul  $2/5$ .

7). Numărul  $a$  este cu 24 mai mare decât  $b$ , iar valoarea raportului  $a/b$  este  $2,3$ . Să se afle cele două numere.

8). Perimetrul unui dreptunghi este 30 cm, iar raportul dimensiunilor lui este  $2/3$ . Să se afle aria lui.

9). Un dreptunghi are perimetrul 42 cm și lungimea este  $5/2$  din lățime. Să se afle : a). raportul dintre lățime și lungime; b). aria lui.

10). Se dau trei numere. Al doilea este cu 15 mai mic decât al treilea, iar raportul dintre al doilea și al treilea este  $8/13$ . Să se afle al doilea și al treilea număr. Dacă primul număr este de 4 ori mai mic decât al doilea, să se afle raportul dintre al treilea și primul.

11). a). Dacă  $6x = 5y$ , aflați  $y/x$ ; b). Dacă diferența numerelor de la punctul a). este 26, aflați numerele.

12). Să se afle  $a$  și  $b$  știind că  $a/b = 2/3$  și  $2a + b = 28$ .

13). Raportul a două numere este  $1/9$ . Care este primul număr dacă : a). suma lor este 30;

b). al doilea număr este 27; c). primul număr este cu 24 mai mic decât al doilea.

14). Diferența dintre numărul fetelor și numărul băieților dintr-o clasă este 5. Să se afle câți băieți sunt în clasă dacă raportul lor este  $3/7 : 8/14$ .

15). Suma a două fracții ireductibile care au același numitor este  $10/11$ . Să se afle cele două fracții dacă raportul numărătorilor este  $3/2$ .

## Procente

### Aflarea a $p\%$ dintr-un număr dat



#### NOTIUNI DE BAZĂ

- prin notația  $p\%$  se înțelege  $p/100$

- pentru aflarea a  $p\%$  dintr-un număr dat se efectuează  $p/100$  din numărul respectiv adică  $p/100$  înmulțit cu numărul dat.

#### EXERCIIȚII ȘI PROBLEME

\*

1). Să se calculeze : a).  $15\%$  din 350

b).  $65\%$  din 39

c).  $12\%$  din 75

d).  $35\%$  din 1200

e).  $67\%$  din 300

2). Prin sortare se pierde  $16\%$  din cantitatea care a fost sortată. Ce cantitate rămâne după sortare, dacă cantitatea inițială a fost de 300 kg ?

3). Un elev a rezolvat  $5\%$  din tema de 20 exerciții. Câte exerciții a rezolvat și câte exerciții mai are de rezolvat ?

**\*\***

- 4). Calculați : a). 0,5% din 1200;                      b). 0,(6)% din 90;                      c). 1,(2)% din 7200.
- 5). Prin măcinarea grâului se pierde 5%. Cât la sută reprezintă făina; câte kg de făină se vor obține din 300 kg de grâu ?
- 6). Untul reprezintă 7% din lapte. Cât unt se va obține din 50 l lapte ?
- 7). Un drumeț care are de mers 12,96 km, a mers în prima oră 25% din drum, a doua oră a parcurs 75% din rest. Câți km mai are de mers ?
- 8). Ce dobândă va primi o persoană într-un an pentru 5000 lei, dacă îi depune cu 37% dobândă ? Ce sumă va avea peste doi ani, în bancă, dacă nu retrage banii ?
- 9). Să se afle aria unui dreptunghi cu perimetrul de 60 cm și lățimea de 15% din perimetru.
- 10). Mihai avea 184 lei. L-a împrumutat pe Dan cu 45% din suma, rămânând astfel cu o sumă de două ori mai mare decât avea Dan la început. Ce sumă de bani a avut Dan ?
- 11). Un kg de cartofi costă 1,5 lei. Cât va costa după o scumpire cu 15% ?
- 12). Un muncitor are o normă de 145 piese. Câte piese a realizat în plus, dacă a făcut 120% din normă ?
- 13). Un elev are o temă de 10 exerciții. Dacă nu a știut să rezolve 10% din temă, câte exerciții a rezolvat ?
- 14). Dan avea 120 lei și vrea să cheltuiască 75% din ei astfel : cu 10% din bani să cumpere un pix, iar cu 35% din bani să cumpere o culegere. Câți bani i-au rămas din cei de cheltuială ?
- 15). Să se compare :
  - a). 5% din 20% din  $x$  cu 8% din 15% din  $x$ ;
  - b). 20% din 40% din  $y$  cu 25% din 30% din  $y$ ;
  - c). 25% din  $a$  cu 80% din  $b$ , dacă  $a$  este de 3 ori mai mic decât  $b$ ;
  - d). 15% din  $a$  cu 40% din  $b$ , dacă  $b$  este 30% din  $a$ ;
  - e). 64% din  $a$  cu 70% din  $b$ , dacă  $b$  este 30% din triplul lui  $a$ .

## Aflarea unui număr când se cunoaște p% din el



### NOTIUNI DE BAZĂ

- întrucât există un număr necunoscut îl vom nota cu  $x$ , obținând  $p/100$  din  $x = a$ , a fiind dat, rezultă  $x = a : p/100$

### EXERCIIII ȘI PROBLEME

**\***

- 1). a). 30% din ce număr reprezintă 27 ?
- b). Să se afle un număr știind că 12% din el reprezintă 3,6.
- c). Dacă 0,5% dintr-un număr reprezintă 15, să se afle numărul.
- 2). 60% dintr-o sumă reprezintă 105 lei. Să se afle suma.
- 3). Un elev a rezolvat 28% din teme, adică 14 exerciții. Câte exerciții și cât la sută din teme mai are de rezolvat ?
- 4). Dintr-o clasă de elevi, 6 elevi merg într-o tabără, ceea ce reprezintă 20%. Câți elevi nu merg în tabără ?
- 5). 12,5% din numărul de elevi ai unei clase merg la olimpiada de matematică. Câți elevi sunt în clasă, dacă au mers 4 elevi la olimpiadă ?

**\*\***

- 6). Să se afle media aritmetică a două numere dacă un număr este 30 și reprezintă 75% din celălalt.
- 7). Dacă scădem 5 din 30% dintr-un număr natural, obținem 5,2. Să se afle numărul.
- 8). Să se afle un număr natural dacă produsul dintre 25% din el și 4% din el este egal cu 1.
- 9). Ce sumă a depus o persoană la bancă, cu dobândă de 6% pe an, dacă a primit după un an 120 lei dobândă ?



- 10) Ce sumă a depus o persoană la bancă, cu dobândă de 6% pe an, dacă are după un an 848 lei ?
- 11). Cât a costat un kg de roșii, dacă după scumpire cu 20% costă 4,2 lei ?
- 12). După indexare de 6%, alocația pentru copii este de 45,05 lei. Cât era înainte de indexare ?
- 13). Un elev a rezolvat 6 exerciții și mai are de rezolvat 60% din temă. Câte exerciții are tema ?
- 14). Un drumet, după ce parcurge 25% din drum, observă că mai are de mers 60 km. Câți km are drumul și câți km a mers ?
- 15). Pentru a împărți cartofii în trei calități, se fac două sortări. După prima sortare mai rămân 70% din cantitate și după a doua sortare mai rămân 50% din prima sortare.
- a). Din 2000 kg cartofi, câte kg din fiecare calitate vor fi ?
- b). Din ce cantitate de cartofi se vor alege 90 kg cartofi, calitatea a III-a ?
- c). Din ce cantitate de cartofi se vor alege 70 kg cartofi, calitatea I ?
- 16). Numărul corigenților dintr-o clasă reprezintă 10% din numărul elevilor.  $\frac{1}{3}$  din numărul corigenților sunt corigenți la matematică, restul fiind la limba română. Câți elevi are clasa dacă sunt 2 corigenți la limba română ?
- 17). Să se afle un număr știind că scăzând 20% din el obținem 36.
- 18). Perimetrul unui dreptunghi este de 124 cm și lățimea este 24% din lungime. Să se afle aria.
- \*\*\*
- 19). Ce sumă a depus o persoană la bancă, cu dobândă de 5% pe an, dacă are după doi ani 6615 lei ?
- 20). Ce sumă a depus un om la bancă, cu dobândă de 6% pe an, dacă dobânda pe doi ani e 24,72 lei ?

## Aflarea raportului procentual



### NOTIUNI DE BAZĂ

- se numește raport procentual raportul  $\frac{p}{100}$

- pentru a afla cât la sută reprezintă numărul a din numărul b, ne folosim de relația :  $a = \frac{p}{100} \cdot b$  sau  $\frac{a}{b} = \frac{p}{100} \rightarrow p = \frac{100 \cdot a}{b}$

### EXERCITII ȘI PROBLEME

\*

- 1). a). Cât la sută din 145 reprezintă 58 ?; b). Cât la sută din 16 reprezintă 20 ?
- 2). Un elev a rezolvat 48 de exerciții din 60 care le avea ca temă. Cât la sută a rezolvat și cât la sută mai are de rezolvat ?

\*\*

- 3). Răzvan are 30 de nuci iar Andrei cu 5 mai puține. Cu cât la sută are mai mult Răzvan decât Andrei ?
- 4). Un muncitor avea de efectuat 1250 piese și a produs doar 800 piese. Cât la sută din normă mai are de efectuat ?
- 5). Un turist a parcurs un drum de 270 km, în trei zile astfel : în prima zi 81 km, în a doua zi 135 km și în a treia zi restul. Cât la sută din drum a parcurs în fiecare zi ?
- 6). Care a fost dobânda anuală a unei bănci, dacă o persoană a depus 8400 lei și a scos după un an 8820 lei ?
- 7). Un automobil trebuia să parcurgă distanța de 400 km în 5 ore, iar el a întârziat 3 ore. Cu cât la sută s-a micșorat viteza automobilului ?
- 8). Dacă suma numerelor a și b este 72 și a este c.m.m.m.c. al numerelor 10 și 8, să se afle :
- a). cât la sută din a reprezintă b; b). cât la sută din sumă reprezintă a ?



## Probabilități

### NOȚIUNI DE BAZĂ

- se numește probabilitatea realizării unui eveniment (rezultatul unei experiențe) raportul dintre numărul cazurilor favorabile realizării evenimentului și numărul cazurilor posibile ale experienței.
- probabilitatea unui eveniment  $A$  se notează cu  $P(A)$ .

### PROBLEME

\*

- 1). Care este probabilitatea ca la aruncarea unui zar să obținem :
- a). fața cu trei puncte
  - b). fața cu un număr par de puncte
  - c). fața cu un număr impar de puncte
  - d). fața cu un număr prim de puncte
  - e). fața cu un număr de puncte mai mic sau egal cu 4
  - f). fața cu un număr de puncte mai mare sau egal cu 5
  - g). fața cu un număr de puncte divizibil cu 3.

- 2). Într-o urnă sunt bile numerotate de la 1 la 30. Care este probabilitatea ca printr-o extragere să obținem:

- a). o bilă cu un număr divizor al lui 24;
- b). o bilă cu un număr multiplu de 5;
- c). o bilă cu un număr prim.

\*\*

- 3). Care este probabilitatea ca la aruncarea cu două zaruri să se obțină :

- a). fețe identice
- b). fețe cu un număr par de puncte
- c). fețe cu numere de puncte prime între ele
- d). suma numerelor de pe cele două fețe să fie multiplu de 3
- e). numărul de puncte de pe fața unui zar să fie divizor al numărului de puncte de pe fața celui alt zar.

- 4). Într-o urnă sunt 2 bile albe, 3 bile negre, 1 bilă roșie și 4 bile albastre.

- a). Care este probabilitatea ca la o extragere să obținem :

- 1). 1 bilă albă; 2). 1 bilă roșie; 3). 1 bilă neagră; 4). 1 bilă albastră;

- b). Care este probabilitatea ca la două extrageri simultane să obținem :

- 1). 2 bile de aceeași culoare; 2). una din bile să fie roșie;

- c). Care este probabilitatea ca la 2 extrageri (prin punerea la loc a primei bile), să se obțină :

- 1). 2 bile de aceeași culoare; 2). una din bile să fie roșie; 3). una din bile să fie albastră.

- 5). Care este probabilitatea ca aruncând de 2 ori o monedă de 5000 lei să apară de fiecare dată fața cu valoarea monedei ? Să apară măcar o dată fața cu valoarea monedei ?

- 6). Într-o urnă sunt bile numerotate de la 1 la 5. Care este probabilitatea ca din 2 extrageri simultane să avem :

- a). amândouă bilele numere pare; b). o bilă să fie număr par; c). suma numerelor să fie 7;
- d). o bilă cu număr par, iar cealaltă cu un număr par; e). cele două bile să fie numere consecutive.

- 7). Într-un săculeț sunt 30 de lozuri dintre care 18 sunt necâștigătoare.

- a). Care este probabilitatea ca la o extragere să se obțină loz câștigător ?

- b). Care este probabilitatea ca la două extrageri consecutive să se obțină două lozuri câștigătoare ?

## Proportionalitate directă



### NOTIUNI DE BAZĂ

- între două mulțimi finite de numere se stabilește o proporționalitate directă dacă se poate forma un șir de rapoarte egale, diferite de zero, astfel încât numărătorii rapoartelor să fie elementele primei mulțimi și numitorii rapoartelor să fie elementele celeilalte mulțimi.
- între  $\{x; y; z\}$  și  $\{a; b; c\}$  se stabilește o proporționalitate directă dacă  $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

### EXERCITII

\*

1). Verificați dacă între mulțimile de mai jos se stabilește o proporționalitate directă :

- a).  $\{5; 6; 8\}$  și  $\{10; 12; 16\}$
- b).  $\{24; 32; 12\}$  și  $\{18; 24; 10\}$
- c).  $\{3/8; 4/5; 1/2\}$  și  $\{1/4; 8/15; 1/3\}$
- d).  $\{1,8; 3,6; 4,8; 5,4\}$  și  $\{0,3; 0,6; 0,8; 0,9\}$
- e).  $\{3/2; 4/5; 1/4; 3/10\}$  și  $\{3; 1,6; 0,5; 0,6\}$

\*\*

2). Aflați  $x, y, z, t \in \mathbb{Q}$ , în fiecare caz în parte, astfel încât între mulțimile de mai jos să se stabilească o proporționalitate directă :

- a).  $\{15; 10; 30\}$  și  $\{x; y; 18\}$
- b).  $\{18; x; 36\}$  și  $\{y; 16; 48\}$
- c).  $\{10; x; y; 30\}$  și  $\{z; 16; 12; 24\}$
- d).  $\{1/3; x; t\}$  și  $\{5/9; 2/3; 5/7\}$
- e).  $\{0,(3); 0,(6); 0,1(6)\}$  și  $\{0,5; z; t\}$
- f).  $\{x; 54; y\}$  și  $\{4; 6; 3\}$
- g).  $\{2x; 4y; 20\}$  și  $\{3; 5; y\}$
- h).  $\{25; x + 7; 30; 3y\}$  și  $\{15; 6; 4z + 2; 45\}$

3). Cu cât este mai mare  $y$  decât  $x$ , dacă între mulțimile  $\{x + 8; 28; y\}$  și  $\{x; 12; 18\}$  se stabilește o proporționalitate directă ?

4). Să se afle raportul dintre  $x$  și  $y$ , dacă între mulțimile  $\{x^2; 4; y\}$  și  $\{2; x; 9\}$  se stabilește o proporționalitate directă.

5). Să se afle media aritmetică a numerelor  $a$  și  $b$ , dacă între mulțimile  $\{a; 12; b\}$  și  $\{2a + 4; 40; 20\}$  se stabilește o proporționalitate directă.

6). Aflați aria unui dreptunghi cu perimetrul 286 cm, iar dimensiunile lui sunt direct proporționale cu 105 și 60.

7). Se dau  $a, b, c$  a căror sumă este 95. Știind că între mulțimile  $\{a; b + 2; c + 3\}$  și  $\{5; 12; 8\}$  se stabilește o proporționalitate directă, să se afle cele trei numere.

8). Aflați numerele naturale  $a$  și  $b$  știind că sunt direct proporționale cu 2 și 5 și suma lor este mai mică decât 22.

9). Aflați numerele naturale  $a$  și  $b$  știind că ele sunt direct proporționale cu 4 și 5 și produsul lor este 500.

10). Aflați numerele naturale  $x, y, z$  știind că sunt direct proporționale cu 2, 3 și 5 și produsul lor este 810.

11). Aflați perimetrul unui dreptunghi care are aria de 336 cm<sup>2</sup> și dimensiunile direct proporționale cu 3 și 7.

\*\*\*

12). Să se afle numerele  $a, b, c$  dacă primele două numere sunt direct proporționale cu 7 și 4, ultimele două numere sunt direct proporționale cu 2 și 9, iar  $a + 2b + 3c = 276$ .

13). Să se afle  $a$  și  $b$ , numere naturale, știind că sunt direct proporționale cu 2 și 3 și c.m.m.d.c. al lor este 4.

14). Să se afle  $a$  și  $b$ , numere naturale, știind că sunt direct proporționale cu 5 și 6 și c.m.m.m.c. al lor este 90.

15). Vârstele fiicei, mamei și tatălui sunt direct proporționale cu 2, 14 și 15. Dacă tatăl are 30 de ani, câți ani au mama și fiica ?

16). Un copil a cheltuit pe o ciocolată, o pungă cu napolitane și o pungă cu chips-uri sume direct proporționale cu 11, 14 și 16. Știind că o ciocolată a costat 2,2 lei, aflați cât au costat celelalte cumpărături.





## NOTIUNI DE BAZĂ

- între două mulțimi finite de numere se stabilește o proporționalitate inversă, dacă se poate forma un șir de produse egale, diferite de zero, astfel încât mulțimea primilor factori ai produselor să fie una din mulțimi, iar mulțimea celorlalți factori ai produselor să fie cealaltă mulțime.

- între  $\{x; y; z\}$  și  $\{a; b; c\}$  se stabilește o proporționalitate inversă dacă :  $x \cdot a = y \cdot b = z \cdot c$  sau :  $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$

## EXERCITII

1). Verificați dacă între următoarele mulțimi se stabilește o proporționalitate inversă :

- a).  $\{3; 6; 5\}$  și  $\{20; 10; 12\}$       c).  $\{2; 3; 4; 6\}$  și  $\{36; 24; 18; 12\}$   
 c).  $\{5; 10; 15; 6\}$  și  $\{30; 15; 10; 25\}$       d).  $\{6; 12; 5; 30; 18\}$  și  $\{30; 15; 36; 8; 10\}$   
 e).  $\{2/3; 0,8; 1/8\}$  și  $\{30; 25; 160\}$

✱ ✱

2). Aflați  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , în fiecare caz, astfel încât între mulțimile de mai jos să se stabilească o proporționalitate inversă :

- a). {a; 6} și {3; 7}
- b). {a; b; 8} și {4; 2; 3}
- c). {a; b; 1} și {0,1; 0,2; 0,7}
- d). {a; b; c; 4,5} și {6; 3,6; 3; 2}
- e). {5/6; 3/4; 6/7; 10/9} și {4/5; a; b; c}
- f). {a; b; 112} și {1/3; 1/5; 1/8}
- g). {a; b; 1; c} și {(1/3)<sup>2</sup>; 1/15; 1/a; 1/12}
- h). {1,5; a; 2,5; b} și {4; 3,75; c; 5}
- i). {2,6; 4,(3); 1,(18)} și {5; a; b}

3). Să se afle  $a, b, c$  știind că între mulțimile următoare s-a stabilit o proporționalitate inversă :

- a).  $\{a + 3; b + 7; 5\}$  și  $\{4; 2; 3\}$  c).  $\{a; b; c; 10\}$  și  $\{1/24; 1/81; 1/(a + 4); 1/5\}$   
b).  $\{12; a; b - 6\}$  și  $\{4; 3a; 2\}$  d).  $\{2a; 2b - 4; c; 4\}$  și  $\{0.5; 1/8; 0.25; 9/12\}$

4). Să se afle  $x, y, z$  dacă sunt invers proporționale cu 2, 3, 4 și suma lor este 13.

5). Aflați aria unui dreptunghi ale cărui dimensiuni sunt invers proporționale cu 3 și 4 iar perimetrul dreptunghiului este 70 cm.

\*\*\*

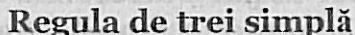
6). Să se afle  $a$  și  $b$  dacă sunt invers proportionale cu  $0,25$  și  $0,(3)$ , iar c.m.m.d.c. al lor este  $6$ .

7). Aflați  $a$  și  $b$  dacă sunt invers proporționale cu  $0,2$  și  $0,25$ , iar c.m.m.m.c. al lor este  $100$ .

8). Trei elevi se consultă după un test. Primul elev consideră că va lua nota 8, al doilea 6 iar al treilea 9. Dacă ultimul elev a făcut 8 greșeli, iar notele sunt invers proporționale cu numărul de greșeli, aflați câte greșeli au elevii.

9). La o crescătorie piscicolă se află 5 bazine identice. Dacă numărul de robinete ce alimentează bazinele este invers proporțional cu timpul de umplere și primul bazin are 4 robinete, al doilea 3 robinete, al treilea 6 robinete, al patrulea 2 robinete și al cincilea 8 robinete, să se afle în cât timp se umplu bazinele, dacă al treilea se umple în 4 minute.

10). Un bazin cu 4 robinete se umple în 20 minute. În cât timp s-ar umple dacă am avea :  
a). 5 robinete; b). 8 robinete; c). 10 robinete; d). 2 robinete.



## NOTIUNI DE BAZĂ

- fiind date două mulțimi între care este stabilită o proporționalitate directă sau inversă, procedeul de aflare a unui element dintr-una din mulțimi se numește regula de trei simplă.

## PROBLEME

\*\*

1). Pentru fabricarea a 20 caiete se consuma 1,5 kg hârtie. Câte kg de hârtie sunt necesare pentru fabricarea a 125 caiete ? Dar pentru 160 caiete ?

- 2). Pentru efectuarea unei lucrări, 10 muncitori lucrează 4 ore. În câte ore vor termina lucrarea 4 muncitori ? De câți muncitori este nevoie pentru a termina lucrarea în 8 ore ?
- 3). Dacă 8 muncitori produc 24 piese, câte piese produc 7 muncitori ?
- 4). 8 găini fac 136 ouă pe lună. Câte ouă fac 15 găini pe lună ?
- 5). 20 de iepuri mănâncă morcovii de pe o parcelă în 7 zile. În câte zile vor mânca morcovii de pe această parcelă 14 iepuri ?
- 6). Dacă 7 m de pânză costă 350000 lei, cât costă 6,5 m ?
- 7). Doi șoricei mănâncă o bucată de brânză în 12 zile (dacă îi lasă gospodina și nu-i prinde pisica). Câți șoricei vor termina bucata de brânză în 3 zile ? În câte zile vor mânca bucata 4 șoricei ?
- 8). 8 iepuri mănâncă pe zi 4,8 kg morcovi. Câți iepuri vor mânca 5,4 kg de morcovi ?
- 9). O mașină care merge cu viteza de 60 km/h parcurge o distanță în 5 ore. În câte ore va parcurge distanța, dacă va merge cu viteza de 45 km/h ?
- 10). O mașină merge cu 3 l benzină, 24 km. Câți km va merge cu 10 l ? De câți litri de benzină este nevoie pentru a parcurge 96 km ?
- 11). Pentru vopsirea unui gard se folosesc 2,5 kg vopsea. Câte kg de vopsea se vor folosi pentru un gard de trei ori mai lung (având aceeași înălțime cu primul gard) ? Dar pentru un gard de două ori mai înalt (având aceeași lungime) ?
- 12). Pentru zugrăvirea unui perete sub formă de pătrat, se folosesc 3,6 kg var. Ce cantitate de var este necesară pentru zugrăvirea unui pătrat cu latura de două ori mai mare decât prima ? Dar cu latura de trei ori mai mică ?
- 13). Pentru a parcurge o distanță de 120 km într-un anumit timp, o mașină trebuie să meargă cu viteza de 50 km/h. Cu ce viteză trebuie să meargă, pentru a parcurge 192 km în același interval de timp ?
- 14). Un tren parcurge 200 km în 3 ore. Câți km va parcurge în 5 ore ? (Se presupune ca trenul se deplasează cu aceeași viteză).
- 15). Un autoturism parcurge distanța dintre două orașe în 6 ore, mergând cu viteza de 60 km/h. În cât timp va parcurge aceeași distanță, dacă merge cu viteza de 90 km/h ? Cu ce viteză trebuie să meargă, dacă va parcurge distanța în 5 ore ?
- 16). Din 7 kg ciuperci proaspete se obțin 0,5 kg ciuperci uscate. Câte kg de ciuperci uscate se vor obține din 8,4 kg ciuperci proaspete ? Câte kg ciuperci proaspete sunt necesare pentru a se obține 3 kg ciuperci uscate ?
- 17). Dintr-o bucată de material se pot croi 5 șortulețe folosind câte 1,5 m pentru un șortuleț. Câte șortulețe de 2,5 m se vor obține din aceeași bucată de material ?
- 18). Din 10 kg de roșii se obțin 6 kg de suc de roșii. Câte kg de roșii sunt necesare pentru a obține 12 kg de suc ? Câte kg de suc de roșii se vor obține din 15 kg de roșii ?
- 19). Pe marginea unui drum se plantează 30 pomi fructiferi din 2 în 2 m. Câți pomi sunt necesari pentru plantarea pe aceeași distanță din 3 în 3 m ?

## Împărțirea unui număr în părți direct sau invers proporționale cu mai multe numere date



### NOTIUNI DE BAZĂ

- cunoscând suma mai multor numere  $x, y, z$  direct sau invers proporționale cu numerele  $a, b, c$  se pot afla primele numere din

relațiile : a)  $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x+y+z}{a+b+c}$  ; b)  $\frac{x}{\frac{1}{a}} = \frac{y}{\frac{1}{b}} = \frac{z}{\frac{1}{c}} = \frac{x+y+z}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$  egalând fiecare raport cu ultimul.

## EXERCIȚII

\*

- 1). Să se împartă numărul 169 în trei părți direct proporționale cu numerele 2; 4; 7.
- 2). Să se împartă numărul 13,6 în părți direct proporționale cu numerele 4; 6; 7.
- 3). Să se împartă numărul  $235/12$  în părți direct proporționale cu numerele  $4/3$ ;  $5/6$ ;  $1$ ;  $3/4$ .
- 4). Să se împartă numărul 186 în părți invers proporționale cu 2; 3; 5.
- 5). Să se împartă numărul 38 în părți invers proporționale cu numerele  $2/3$ ;  $1/6$ ;  $1/2$ .
- 6). Să se împartă numărul 78 în părți invers proporționale cu numerele 2,5;  $1/2$ ; 5.
- 7). Să se împartă numărul 625 în părți direct proporționale cu numerele 0,2; 0,3; 0,(3).
- 8). Să se afle numerele  $x, y, z, t$  a căror sumă este 70 și sunt invers proporționale cu numerele 0,(3); 0,5; 0,2; 0,25.

\*\*

- 9). Să se afle numerele  $x, y, z \in \mathbb{Q}$ , în fiecare caz, știind că sunt direct proporționale cu 3; 4; 5 și :

a).  $x + y + z = 84$       b).  $x + 2y + 3z = 52$       c).  $3x + 4y + 5z = 50$

d).  $x^2 + y^2 + z^2 = 200$       e).  $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{47}{80}$

- 10). Să se afle  $x, y, z \in \mathbb{Q}$  știind că sunt invers proporționale cu numerele 0,8; 0,6; 0,4 și :

a).  $x + y + z = 260$       b).  $2x + 3y + 4z = 245$   
c).  $x^2 + y^2 + z^2 = 1525$       d).  $1/x + 1/y + 1/z = 0,25$

- 11). Să se afle trei numere raționale direct proporționale cu numerele 2; 3; 4 știind că media lor aritmetică este 30.

- 12). Laturile unui triunghi sunt direct proporționale cu numerele 3; 5; 7 iar perimetrul său este 120 cm. Să se afle lungimile laturilor acestui triunghi.

- 13). Perimetrul unui dreptunghi este 176 cm. Să se afle aria lui, dacă dimensiunile sale sunt direct proporționale cu 2,5 și  $1\frac{1}{6}$ .

- 14). Să se afle  $x, y, z \in \mathbb{Q}$  dacă se știe că sunt direct proporționale cu numerele 5; 6; 7 și  $2x^2 + y^2 + 3z^2 = 233$ .

- 15). Să se afle  $x, y, z, t \in \mathbb{Q}$  invers proporționale cu numerele  $1/5$ ;  $1/6$ ; 0,(1); 0,1 dacă media aritmetică dintre cel mai mic număr și cel mai mare este 22,5.

- 16). Să se afle media aritmetică a patru numere care sunt direct proporționale cu 2; 4; 5; 6 iar media aritmetică a primelor trei numere este 22.

- 17). Suma de 152 lei este împărțită la trei muncitori în părți direct proporționale cu numărul de ore lucrate. Să se afle cât a primit fiecare, dacă au lucrat 4 ore, 6 ore, respectiv 9 ore.

- 18). La o serbare s-au împărțit 112 bomboane la 6 copii în părți direct proporționale cu vârsta fiecăruia. Câte bomboane primește fiecare, dacă au 3 ani, 5 ani, 4 ani, 3 ani, 6 ani, 7 ani?

- 19). Trei elevi au rezolvat 24; 27 respectiv 30 exerciții. Știind că au primit note direct proporționale cu numărul de exerciții rezolvate și media aritmetică a notelor este 9, să se afle ce notă a luat fiecare.

- 20). Trei muncitori au lucrat un număr de ore direct proporțional cu 3; 5; 7 și au primit 112,5 lei. Știind că primul a lucrat 9 ore, aflați câte ore a lucrat fiecare și ce sumă a primit fiecare.

- 21). Doi muncitori au observat la sfârșitul zilei că au stricat 10 piese respectiv 12 piese. Știind că sunt plătiți invers proporțional cu numărul de piese defecte și că au primit împreună



110 lei, să se afle cât a primit fiecare.

22). Un cupon de pânză a fost împărțit în trei părți direct proporționale cu  $1/2$ ;  $3/4$ ;  $1/3$ . Știind că întregul cupon costa 760 lei și că prima parte are 24 m, aflați cât costă fiecare parte și câți metri are tot cuponul.

## Exerciții recapitulative

1). Dacă  $x = 4y$  aflați  $\frac{2x+y}{3y}$ .

2). Dacă  $\frac{x}{3} = y$  aflați  $\frac{2y}{2y+x}$ .

3). Să se afle  $x \in \mathbb{Q}$  :

a).  $\frac{15}{x} = \frac{50}{30}$

b).  $\frac{x+1}{3} = \frac{4,2}{7}$

c).  $\frac{5x+2}{15} = \frac{32}{40}$

d).  $\frac{2^{82} + 4^{41}}{x+3} = \frac{10^{80}}{25^{40}}$

e).  $\frac{5 \cdot 2^{16} + 4^7 - 8^5}{x-3} = \frac{38}{4}$

f).  $\frac{\frac{1}{3} + 2\frac{1}{6}}{x} = \frac{1}{\frac{8}{20}}$

g).  $\frac{\left(\frac{2}{10}\right)^2}{2x} = \frac{0,1}{12\frac{1}{2}}$

h).  $\frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{3} : 3}{x + \frac{1}{5}} = \left(\frac{2}{3}\right)^2$

i).  $\frac{0, (6)}{0,2} = \frac{0,06}{(1-0,8) \cdot x}$

4). Să se afle  $x$  din proporțiile :

a).  $\frac{\overline{ab}}{x} = \frac{15}{25}$ ,  $\overline{ab}$  cel mai mare număr impar; b).  $\frac{\overline{ab}}{x+1} = \frac{26}{6}$ ,  $\overline{ab}$  cel mai mic număr prim,  $a \neq b$ .

c).  $\frac{5 \cdot 3^n + 2 \cdot 3^{n+1} + 3^n}{2 \cdot 3^n} = \frac{\overline{3ab}}{x-1}$ ,  $\overline{3ab}$  cel mai mare număr divizibil cu 18.

5). Să se afle  $x$  : a).  $\frac{x+3}{5} = \frac{x+6}{10}$ ; b).  $\frac{2x+1}{10} = \frac{3x+1}{14}$

6). Să se afle  $x$  și  $y$  dacă suma lor este 44 și raportul lor este  $3/8$ .

7). Să se afle  $x$  și  $y$  dacă diferența lor este 36 și raportul lor este  $5/7$ .

8). Să se afle  $x$  și  $y$  dacă suma lor este 35 și  $\frac{2x+3y}{3y} = \frac{3}{2}$

9). Să se afle  $\frac{4x+y}{x+2y}$  dacă  $\frac{3x+y}{4x+3y} = \frac{9}{17}$

10). Aflați  $x, y, z$  dacă  $\frac{x}{3} = \frac{y}{6}$ ,  $\frac{y}{2} = z$  și  $x + 2y + z = 18$ .

11). Aflați  $x, y, z$  dacă  $\frac{x}{0,3} = \frac{10y}{4}$  și  $\frac{y}{4} = \frac{3z}{5}$  și :

a).  $x + y + 3z = 72$

b).  $x - z = 72$

c).  $y + 3z = 90$

d).  $x^2 + y^2 = 225$

- 12). Să se afle  $x$  și  $y$  dacă se stabilește o relație de direct proporționalitate între :
- a).  $\{2x + 1; 18; y\}$  și  $\{x; 8; 12\}$       b).  $\{x; 18; 2x - 1\}$  și  $\{y; 12; x + 1\}$
- c).  $\left\{x + 1; \frac{4}{3}; y\right\}$  și  $\left\{\frac{1}{2x + 1}; \frac{3}{7}; x\right\}$  dacă se stabilește o proporționalitate inversă.
- 13). În ce cantitate de apă trebuie dizolvate 200 g sare pentru a obține o soluție cu concentrația de 5% ?
- 14). Să se afle concentrația unei soluții formată din 80 g sare și 1920g apă.
- 15). Se dizolvă o cantitate de sare în 576 g apă obținându-se o soluție cu concentrația de 4%. Ce cantitate de apă trebuie adăugată pentru a se obține o concentrație de 3% ?
- 16). 30 g sare se dizolvă în 1470 g apă. Să se afle : a). concentrația soluției ce se obține; b). ce cantitate de apă trebuie adăugată pentru a se obține o soluție cu concentrația de 0,5%.
- 17). 80 g de soluție are concentrația de 10%. Să se afle : a). câte grame de sare sunt dizolvate; b). ce cantitate de sare trebuie adăugată pentru a se obține o concentrație de 20% ?
- 18). În 40 g apă se dizolvă o cantitate de sare, astfel încât concentrația soluției este de 20%. Să se afle : a). ce cantitate de sare conține soluția; b). dacă se mai adaugă 14 g sare, ce concentrație va avea noua soluție ?
- 19). 8 g de sare sunt dizolvate într-o cantitate de apă, obținându-se o soluție cu concentrația 10%. Această soluție se amestecă cu o altă soluție de concentrație 20%, care conține 40 g apă. Să se afle : a). cantitatea de apă din prima soluție; b). cantitatea de sare din a doua soluție; c). concentrația amestecului.
- 20). Într-o clasă de 28 elevi, fetele reprezintă 75% din numărul băieților. Câți băieți sunt ? Câte fete sunt ?
- 21). Într-o clasă sunt cu 5 băieți mai mult decât fete și fetele reprezintă 75% din numărul băieților. Câți băieți și câte fete sunt ?
- 22). Într-o clasă sunt cu 12 băieți mai mult decât fete și fetele reprezintă 30% din numărul elevilor. Câți elevi sunt ?
- 23). Un drumeț a mers 24% din drum și mai are 52 km până la jumătatea drumului. Câți km are drumul ?
- 24). Un număr reprezintă 60% din alful. Aflați cele două numere din fiecare caz în parte: a). suma numerelor este 24; b). diferența numerelor este 12; c). produsul numerelor este 1500; d). c.m.m.d.c.-ul lor este 8; e). c.m.m.m.c.-ul lor este 90.
- 25). Un drumeț a mers 12 km și mai are 10% din drum până la jumătatea drumului. Câți km are drumul ?
- 26). Un drumeț a mers 30% din drum și mai are de mers cu 28 km mai mult decât a mers deja. Câți km a mers ?
- 27). Suma a două numere este 185. Să se afle cele două numere, dacă se știe că unul din ele este mai mare decât celălalt cu 20% din suma lor.
- 28). Suma a trei numere este 280. Să se afle numerele, dacă primul număr reprezintă 25% din al doilea, iar al treilea reprezintă 15% din al doilea număr.
- 29). Suma a trei numere este 314. Să se afle cele trei numere, dacă primul reprezintă 14% din al doilea număr, iar al doilea reprezintă 50% din al treilea.
- 30). Dacă  $a$  reprezintă 40% din  $b$  și 60% din  $c$ ,  $a + b + c = 62$ , să se afle  $a, b, c$ .
- 31).  $a + b + c = 460$ . Să se afle  $a, b, c$  numere naturale, dacă  $a$  și  $b$  sunt direct proporționale cu 3 și 4, iar  $b$  reprezintă 25% din  $c$ .
- 32). Cât la sută reprezintă  $b$  din suma  $a + b$ , dacă  $a$  reprezintă 40% din  $a + b$  ?
- 33). a). Un număr  $a$  reprezintă 20% din  $b$ . Cât la sută reprezintă  $b$  din  $8a$  ?  
b). Dacă  $b$  reprezintă 25% din  $a$ , să se afle cât la sută din suma celor două numere reprezintă  $a$ .
- 34). Un muncitor avea de efectuat un număr de piese. El a depășit numărul de piese cu 30%, dar constată că 5 din ele sunt defecte. Știind că 528 de piese sunt bune să se afle câte piese avea de efectuat.
- 35). 80% din elevii unei clase merg să viziteze un muzeu. 50% din cei care au mers la muzeu, vor să meargă și în excursie. Dacă 18 elevi din clasă nu vor în excursie, să se afle : a). cât la sută din numărul de elevi din clasă vor să meargă în excursie; b). câți elevi merg la muzeu; c). câți elevi vor să meargă în excursie.
- 36). Se știe că un număr reprezintă 40% din dublul altui număr. Dacă media aritmetică a

celor două numere este 18, să se afle numerele.

37). 25% din elevii unei clase merg la olimpiadele școlare. 2 elevi la olimpiada de matematică, 4 elevi la olimpiada de limba română, și 2 elevi la olimpiada de istorie. Fiecare elev participă la o singură olimpiadă. 75% din ei s-au calificat pentru fazele superioare. Să se afle : a). câți elevi sunt în clasă; b). cât la sută din elevii clasei merg la fiecare olimpiadă; c). cât la sută din participanții la olimpiade merg la olimpiada de matematică; d). câți elevi s-au calificat pentru fazele superioare.

38). Media aritmetică a două numere este 320. Dacă primul număr se mărește cu 20% din suma lor și celălalt se micșorează cu 32, să se afle cât la sută reprezintă suma numerelor astfel obținute din suma numerelor inițiale.

39). Se da un dreptunghi cu lățimea de 6 cm și lungimea de 8 cm. Un alt dreptunghi are lățimea egală cu 75% din lățimea primului dreptunghi, iar lungimea cu 25% mai mică decât lungimea primului. Să se afle cât la sută reprezintă aria celui de-al doilea dreptunghi din aria primului dreptunghi.

40). Un dreptunghi are dimensiunile de 8 cm, respectiv 10 cm. Să se afle cât la sută din aria lui reprezintă aria unui pătrat care are latura egală cu 50% din lățimea dreptunghiului.

## Testul 1

⑤1p 1). Dacă  $\frac{x}{5} = \frac{12}{3}$  atunci  $x = \dots\dots\dots$

⑤1p 2). Dacă din 15 l de lapte se scot 2 kg de smântână, din cât lapte se vor scoate 3 kg de smântână ?

3). ⑤ p a). 14% din 50 este .....

⑤ p b). dacă 5% din  $x$  este 18, atunci  $x = \dots\dots\dots$

⑦ p c). Un pantalon care costa 70 lei costă acum 63 lei. Cu ce procent a fost redus prețul ?

⑦1p 4). Dacă 6 cai mănâncă o cantitate de fân în 4 zile, atunci 8 cai o vor mânca în ..... zile.

⑨1p 5). Dacă  $x$  și  $y$  sunt direct proporționale cu 2 și 5  $\Rightarrow \frac{3x+y}{2y} = \dots\dots\dots$

⑨1p 6). Numerele  $x$ ,  $y$  și  $z$  sunt direct proporționale cu 3, 7 respectiv 2 și  $xy + yz = 175$ . Aflați cele trei numere.

⑩1p 7). Dacă  $x$  și  $y$  sunt invers proporționale cu 3 și 4 și c.m.m.d.c. al lor este 18 atunci atunci  $x = \dots\dots\dots$  și  $y = \dots\dots\dots$

## Testul 2

⑤1p 1). Aflați  $x$  din proporția :  $\frac{50}{21} = \frac{x}{63}$ .

⑤1p 2). 20% din 365 reprezintă .....

3). Într-o urnă sunt 7 bile roșii, 5 bile negre și 8 bile albe. Aflați :

⑤1p a). probabilitatea ca la o extragere să obținem o bilă neagră.

⑤1p b). probabilitatea ca la o extragere să obținem o bilă care nu e albă.

⑦1p 4). Dacă  $\frac{a}{b} = 7$  și  $\frac{b}{c} = 5$ , atunci  $\frac{a}{c} = \dots\dots\dots$

⑦1p 5). Știind că  $x = \frac{4}{25}y$ , să se afle cât la sută reprezintă  $x$  din  $y$ .

⑨1p 6). Să se afle numerele  $a$ ,  $b$  și  $c$  dacă sunt direct proporționale cu 5; 7 respectiv 10 și  $2a + 3b - c = 210$ .

⑨1p 7). Un tren mergând cu viteză de 120 km/h parcurge distanța de 600 m într-un interval de timp. Cu ce viteză trebuie să meargă astfel ca distanța de 800 m să fie parcursă în același interval de timp?

⑩1p 8). Aflați media aritmetică a numerelor  $a$  și  $b$  care sunt invers proporționale cu numerele 0,5 și 0,25 iar produsul lor este 288.



## Capitolul VI NUMERE ÎNTREGI

### Reprezentarea pe dreaptă. Incluziunea $N \subset Z$ .



#### NOTIUNI DE BAZĂ

- pentru reprezentarea numerelor întregi pe axă se aleg :

- 1) originea drepte
- 2) sensul pozitiv (de la origine în dreapta) și sensul negativ (de la origine în stanga)
- 3) unitatea de măsură

de exemplu : - se așează numărul întreg pozitiv 5 la capătul segmentului de lungime egală cu 5 unități de măsură, spre dreapta, diferit de origine.

- se așează numărul întreg negativ - 8 la capătul segmentului de lungime egală cu 8 unități de măsură, spre stânga, diferit de origine.

#### EXERCITII

1). Reprezentați pe o dreaptă punctele corespunzătoare numerelor :

- a). 1; -3; -5; 4; 6; -1      b). 7; -2; 3; -3; 5; -8      c). 10; -10; 30; -40; 50  
d). 15; -25; 40; -40; -5; 30      e). 1000; -800; 300; -500; -200

2). Care din următoarele numere sunt naturale :

- a). -5; -0,8; 3,2; 4; -1; 0; 5      b). 3/2; 4; -2; 6/3; -5

3). Să se precizeze, pentru fiecare număr în parte, dacă aparține sau nu mulțimilor  $N$  și  $Z$  :

- a). -5; b). 3; c). 0,8; d). -1/2; e). -7; f). 4; g). 1, (3)

4). Fie mulțimile :  $A = \{-5; 3; 3/4; 0,2; -1, (8); 2; 0; -4\}$

$$B = \{x / x \in A \text{ și } x \in N\}$$

$$C = \{x / x \in A \text{ și } x \in Z\}$$

$$D = \{x / x \in A \text{ și } x \in Z \text{ și } x \notin N\}$$

Să se arate că : a).  $A \cap N = B$ ; b).  $B \cup D = C$ ; c).  $C - N = D$ ; d).  $A \cap Z = C$

5). Aflați opusele numerelor : -5; 7; 2; -3; 1 și reprezentați pe axă și numerele și opusele lor. Ce observați ?

6). Într-o zi, la ora șase dimineața, s-au înregistrat  $-3^{\circ}\text{C}$  iar la ora 12 erau  $5^{\circ}\text{C}$ . a). temperatura a crescut sau a scăzut ? b). cu câte grade s-a modificat temperatura ?

### Valoarea absolută a unui număr întreg (modulul)



#### NOTIUNI DE BAZĂ

- proprietăți :  
1). modulul oricărui număr întreg este nenegativ  
2).  $|x| = |-x|$

#### EXERCITII

\*\*\*

1). Dovedește că ai înțeles lecția :

- |  |        |  |        |
|--|--------|--|--------|
| a). $ -5  +  6  -  -11  =$                       | R : 0  | b). $ -3  +  2  -  0  =$                 | R : 5  |
| c). $ 3  +  -6  -  -5  =$                        | R : 4  | d). $ -6  +  12  :  -3  =$               | R : 10 |
| e). $( -24  :  -8 )^2 -  -10  :  2  =$           | R : 4  | f). $ 4  +  -4  \cdot 2 -  -16  : 2 =$   | R : 4  |
| g). $ -12  :  7 - 3  +  -8  : 2 + 2 \cdot  0  =$ | R : 7  | h). $ -4  +  6 + 3  - 2 \cdot  5 - 3  =$ | R : 9  |
| i). $ 7 + 9  +  -6  =$                           | R : 22 | j). $ 13 - 9  +  -12  =$                 | R : 16 |
| k). $ 31 - 29  +  42 - 25  =$                    | R : 19 | l). $ 2 \cdot 7 - 8  -  -5  =$           | R : 1  |
| m). $ 3 \cdot 8 \cdot 0 + 4  -  0  =$            | R : 4  | n). $ 2^3 - 7  -  -1  =$                 | R : 0  |

o). $ 5^2 - 4^2  -  3^2  =$	R : 0	p). $ 3 ^2 -  -3 ^2 =$	R : 0
r). $( -6  +  -1 )^2 - 49 =$	R : 0	s). $ 3 +  7 - 4   =$	R : 6
t). $ 6 -  22 - 4^2   =$	R : 0	u). $ 15 -  12 - 10 ^2 ^0 =$	R : 1
v). $  6 - 3 ^2 :  -3  +  -5 ^0 ^2 =$	R : 16	z). $  2 \cdot 6 - 3  -  10  :  -5  -  -4  ^3 =$	R : 27

2). Așezați semnele „<” sau „>” sau „=” în locul semnului „?” pentru a obține propoziții adevărate:

a). $ 8 - 5  ?  -3 $	b). $0 ?  10 - 7 $	c). $ 7 - 2^2  ?  -4 $
d). $ 3^2 - 5 \cdot 0  ?  0 $	e). $ -3 ^2 ?  3^2 $	f). $2 \cdot  -3  ?  -4  : 2 + 2$
g). $ -2 ^3 ?  3^2 $	h). $ 2 +  6 - 3   ?  -2 ^2$	i). $ -5  +  -10  : 2 ?   10 - 6  :  -2  +  -8  $

3). Aflați  $x \in \mathbb{Z}$  pentru care sunt adevărate următoarele propoziții :

a). $ x  = 0$	b). $ x  = 5$	c). $ x  = 17$	d). $ x  = -1$	e). $ x  = 3$
f). $ x  = -3$	g). $ x  + 2 = 6$	h). $ x  - 3 = 7$	i). $2 \cdot  x  = 0$	j). $3 \cdot  x  = 27$
k). $4 \cdot  x  + 5 = 25$	l). $2 \cdot  x  - 3 = 7$	m). $3 \cdot ( x  + 2) = 18$	n). $2 \cdot ( x  + 1 +  x ) = 26$	o). $3 \cdot  x  = 8 +  x $

## Adunarea și scăderea numerelor întregi. Desfacerea parantezelor



### NOȚIUNI DE BAZĂ

- la adunarea numerelor întregi apar trei cazuri :

1). ambele numere sunt întregi pozitive (deci naturale)  $\Rightarrow$  suma este suma numerelor naturale a și b

2). ambele numere sunt întregi negative  $\Rightarrow$  suma este  $-(|a| + |b|)$

3). un număr este întreg negativ și celălalt întreg pozitiv  $\Rightarrow$  suma este : 0 dacă  $|a| = |b|$ .

Dacă  $|a| \neq |b|$  efectuăm operație de scădere între modulul mai mare și modulul mai mic, iar la rezultat se scrie semnul numărului care are modulul mai mare.

- se definește opusul numărului a ca fiind -a și opusul numărului -a ca fiind a.

- la scăderea a doua numere întregi se efectuează operație de adunare între primul număr și opusul celui de-al doilea.

- dacă în fața unei paranteze este simbolul „+” atunci se suprimă paranteza și simbolul „+” și se scrie expresia din paranteză, neschimbată.

- dacă în fața unei paranteze este simbolul „-” atunci se suprimă paranteza și simbolul „-” și se scrie expresia din paranteză schimbând simbolurile („-” în „+”, respectiv „+” în „-”).

### EXERCITII

\*

1). Poți să le rezolvi în 10 minute? Calculează :

a). $17 - 38 =$	b). $39 - 51 =$	c). $-34 + 42 =$	d). $56 - 80 =$	e). $-19 + 32 =$
f). $-34 + 51 =$	g). $-45 + 71 =$	h). $38 - 72 =$	i). $+13 - 15 =$	j). $-16 - 79 =$
k). $-108 - 83 =$	l). $-13 + 5 - 42 =$	m). $3 - 11 + 7 =$	n). $14 - 38 - 19 =$	
o). $-17 + 9 - 13 =$	p). $-15 + 8 - 29 =$	r). $-6 + 12 - 7 - 2 + 4 =$		

2). Consolidază-ți cunoștințele :

a). $-13 + 4 =$	f). $-10 + 15 - 18 + 20 - 9 =$	k). $0 - 7 =$
b). $28 - 30 =$	g). $-28 + 45 - 56 + 13 =$	l). $1 + 5 - 10 =$
c). $-7 - 8 =$	h). $-1 + 13 - 25 - 14 + 7 - 11 =$	m). $-14 - 25 =$
d). $-12 - 6 + 10 =$	i). $0 - 18 + 4 - 7 + 10 =$	n). $-15 + 6 - 17 =$
e). $42 - 28 - 37 =$	j). $13 - 20 - 18 + 6 - 4 + 15 =$	o). $21 + 15 - 32 - 24 + 5 =$
p). $11 - 20 + 12 + 5 - 37 =$	s). $-12 - 30 + 4 - 7 + 58 =$	v). $-17 - 21 + 45 - 50 + 6 =$
r). $25 - 15 - 10 - 14 + 8 =$	t). $-7 + 10 - 15 + 25 - 4 =$	

\*\*

3). Perseverează și calculează :

a). $17 - (+19) =$	b). $-36 - (-39) =$	c). $48 - (-51) =$
--------------------	---------------------	--------------------

d).  $-30 + (+16) =$  e).  $-(-5) + 3 =$  f).  $- (+7) - (-13) =$   
g).  $-7 - (-3) - 2 =$  h).  $-5 - 4 - (-8) - (-2) =$  i).  $15 - 6 - (+3) - 17 =$   
j).  $8 - 10 - (-4 + 3) \div 1 =$  k).  $-3 + (-7) - (-11) =$  l).  $-(-8) - (+3) + (-6) =$   
m).  $-5 + 2 - (-7 + 3) + (-4 - 5) =$  n).  $6 - (4 - 7) + (-3 + 5) - (-2) =$

4). Verifică dacă rezultatele sunt corecte :

a).  $7 - [3 - (10 - 15)] =$  R: -1 i).  $-5 - [-4 + (2 - 7)] =$  R: 4  
b).  $17 - [2 - (-5 + 13)] =$  R: 23 j).  $-[6 - (18 - 32)] + 27 =$  R: 7  
c).  $43 + [-15 + (12 - 51)] =$  R: -11 k).  $-34 - (12 - 24) + [(-5 - 7) + 9] =$  R: -25  
d).  $53 - [-5 - (3 - 18)] =$  R: 43 l).  $2 - [-17 + (2 - 8) - 3] + (-17 - 39) =$  R: -28  
e).  $13 - [-2 + 5 - (-4 + 6 - 2)] =$  R: 10 m).  $-36 + \{-2 + [6 + (-18 - 16)]\} =$  R: -66  
f).  $-15 - [-12 + (-3 + 7)] =$  R: -7 n).  $-14 + \{-6 - 3 + [-6 + (-5)]\} =$  R: -34  
g).  $-22 + 19 + [(-1) + 7 - (-5)] =$  R: 8 o).  $-13 + \{-17 - [-31 + 19 - (-3)]\} =$  R: -21  
h).  $-36 - (3 - 6) + (-5 - 3) =$  R: -41

5). Calculați :

a).  $|5^3 - 11^2|$  b).  $|10^2 - 2^7|$  c).  $|7^2 - 4^3| - 14$  d).  $|4^8 - 8^4| + 2^{12}$   
e).  $|5^{22} - 3^{33}| + 25^{11}$  f).  $|3^{34} - 2^{31}| - 3^{34}$  g).  $|5^{30} - 2^{70}| + 125^{10}$

6). Dovedește că poți să le rezolvi :

a).  $|3| - |-6| =$  b).  $|-4| + |-1| =$  c).  $|6| - |-7| - |-13| =$   
d).  $-|-12| + |-3| =$  e).  $|-18| - |-23| =$  f).  $-18 + (-16 + |-3 - 9|) =$   
g).  $-3 - (+17 - |-19 - 3|) =$  h).  $-19 + |-13 - 5 + |-7 - 8|| =$

7). Vrei să iei o notă bună ? Rezolvă :

a).  $|-6| + (-13 + 10) + (-8) + |-2 + 5| =$  R: -2 b).  $|-7 + 3| \cdot (-12 + 14) + (-10) =$  R: -2  
c).  $|-15| : |3| + (-6) + (-15 + 8) =$  R: -8 d).  $(-4) + 15 : |-3| + (-8) + (-24 + 6) =$  R: -25  
e).  $(-6) + (-3) + |-12 + 20| =$  R: -1 f).  $(-10) + |(-8) + (-3)| + (-4 + 9) =$  R: 6  
g).  $|-10 + (-3)| + |-3| \cdot (-4 + 6) + (-13) =$  R: 6 h).  $|-4| + |-6 - 3| - 2 \cdot |-3 + 5| =$  R: 9  
i).  $[(-8) + (-3) + (-1)] + |-4| + (-8) =$  R: -16 j).  $|-3 + 2| \cdot |4 + (-6)| + |-8| + (-25) =$  R: -15

## Relațiile de $<$ , $\leq$ , $\geq$ , $>$ între numere întregi



### NOTIUNI DE BAZĂ

-un număr întreg  $a$  este mai mare decât un număr întreg  $b$ , ceea ce se scrie  $a > b$ .

- proprietăți :

- $|a| \geq a$  oricare ar fi  $a \in \mathbb{Z}$
- $|a| \geq 0$  oricare ar fi  $a \in \mathbb{Z}$
- $a > 0$  oricare ar fi  $a$  strict pozitiv
- $a < 0$  oricare ar fi  $a$  strict negativ
- $a < b$  oricare ar fi  $a$  strict negativ și  $b$  strict pozitiv

### EXERCITII

\*\*

1). Comparați :

a).  $-2$  cu  $5$  b).  $-3$  cu  $|-7|$  c).  $-5$  cu  $-6$   
d).  $|-2|$  cu  $-4$  e).  $|-12|$  cu  $|-26|$  f).  $|-4| - 12$  cu  $-6$   
g).  $|-5|$  cu  $|7 - 8|$  h).  $|-3|$  cu  $|6 - 9|$  i).  $|-2|^2$  cu  $|2 - 6|$   
j).  $|-5| - 6$  cu  $10 - 11$  k).  $-6 + 10$  cu  $-(8 - 15)$  l).  $-8$  cu  $|-3| - |17| - |-20|$   
m).  $|-10 + 13| - 2$  cu  $-6 + 5$  n).  $|-6| - 2 \cdot (-13 + 15)$  cu  $-8 + 8 \cdot (-6 + 8)$  o).  $2$  cu  $|-2| - 2 + (-4 + 6) : |-2|$



2). Să se așeze în ordine crescătoare numerele :

a).  $-1; 6; -10; 2; -5; -8; 14; -3$  b).  $|-2|; 0; -3 + 1; |-5| - 6; |-2|^2 - 4; -(6 - 10)$

3). Să se așeze în ordine descrescătoare numerele :

a).  $-6; 4; 0; -1; -13; 12; -25; -8$  b).  $|-4| \cdot 2; -|-5|; -6 + 2; -3 - (-5); -4 + (-1)$

4). Fie numerele :  $A = -2 + 5 \cdot |-4 + 3| - 20$ ;  $B = |-10 + 2| - (-5) + (-25)$ ;  $C = -8 + (-6 + 3) - (-4)$ .

Să se așeze în ordine crescătoare numerele A, B, C și apoi să se reprezinte pe dreaptă.

5). Care este : a). cel mai mic număr întreg din trei cifre; b). cel mai mare număr întreg negativ de patru cifre; c). cel mai mic număr întreg de cinci cifre; d). cel mai mare număr întreg negativ de două cifre ?

6). Se consideră cinci numere întregi consecutive. Să se afle numerele, știind că cel mai mare este 1.

7). Să se afle șapte numere întregi consecutive, știind că numărul din mijloc este  $-1$ .

8). Efectuați :

a).  $1 - 2 + 3 - 4 + \dots + 39 - 40 =$

R :  $-20$

b).  $1 + 2 - 3 + 4 + 5 - 6 + \dots + 88 + 89 - 90 =$

R :  $1305$

c).  $1 - 3 + 5 - 7 + 9 - 11 + \dots + 97 - 99 =$

R :  $-50$

d).  $-1 + 4 - 7 + 10 - 13 + 16 - \dots - 73 + 76 =$

R :  $39$

9). Să se afle șapte numere întregi consecutive, știind că suma celor două mai mari este 3.

10). Care este mai mare : a). opusul lui  $-5$  sau opusul lui  $-2$ ; b). opusul lui  $-6$  sau  $|-10 + 7|$  ?

11). Să se afle diferența dintre cel mai mare număr întreg de două cifre și cel mai mic număr întreg de trei cifre.

12). Cum va fi suma dintre cel mai mare număr întreg negativ de trei cifre și cel mai mic număr întreg format dintr-o cifră față de  $-108$  ?

13). Să se efectueze suma dintre cel mai mare număr întreg mai mic decât  $-20$  și cel mai mic număr întreg de două cifre.

14). Să se calculeze diferența dintre cel mai mic număr întreg mai mare decât  $-218$  și cel mai mare număr întreg de două cifre.

\*\*\*

15). Să se afle x, în fiecare caz în parte :

a).  $|x| < 4, x \in \mathbb{Z}$

b).  $|x| \leq 7, x \in \mathbb{N}^*$

c).  $|x| = 0, x \in \mathbb{Z}$

d).  $|x| < 0, x \in \mathbb{Z}$

e).  $|x| > -3, x \in \mathbb{N}$

f).  $|x| \leq -4, x \in \mathbb{Z}$

g).  $1 < |x| \leq 3, x \in \mathbb{N}$

h).  $2 \leq |x| < 4, x \in \mathbb{Z}$

16). Fie  $A = \{x \in \mathbb{Z} | -3 < x \leq 2\}$  și  $B = \{x \in \mathbb{Z} | |x| < 4\}$ .

Calculați : a)  $A - B$ ; b)  $A \cap \mathbb{N}$ ; c)  $B - \mathbb{N}^*$ ; d)  $A \cap B$ ; e)  $B - A$ .

17). Fie  $A = \{x \in \mathbb{Z} | |x| = x, x < 10\}$ ;  $B = \{x \in \mathbb{Z} | |x| = -x, |x| \leq 5\}$ ;  $C = \{x \in \mathbb{Z} | |x| = -x, x > -3\}$

Calculați : a)  $A \cap B$ ; b)  $A - C$ ; c)  $B - A$ ; d)  $B - \mathbb{N}^*$ ; e)  $C - \mathbb{N}$ ; f)  $A \cap \mathbb{N}$

## Înmulțirea numerelor întregi



### NOTIUNI DE BAZĂ

- se deosebesc trei cazuri : a). cele două numere sunt naturale;

b). cele două numere sunt întregi negative  $\Rightarrow a \cdot b = |a| \cdot |b|$ ;

c). un număr este natural iar celălalt este întreg negativ  $\Rightarrow a \cdot b = -|a| \cdot |b|$

### EXERCITII

\*

1). Dovedește că ai înțeles lecția, calculând :

a).  $-2 \cdot (-6) =$  b).  $-3 \cdot 4 =$  c).  $8 \cdot (-2) =$  d).  $-6 \cdot (-3) =$  e).  $10 \cdot (-11) =$

f).  $-7 \cdot (-9) =$  g).  $-8 \cdot 4 =$  h).  $-7 \cdot (-8) =$  i).  $-10 \cdot 3 =$  j).  $8 \cdot (-6) =$

k).  $-9 \cdot (-6) =$  l).  $4 \cdot (-7) =$  m).  $(-8) \cdot 9 =$  n).  $(-7) \cdot 0 =$  o).  $-1 \cdot (-4) =$

2). Aceste exerciții sunt ușoare! Rezolvă-le :

- a).  $2 \cdot (-6) \cdot (-1) =$                       b).  $5 \cdot (-7) \cdot 0 \cdot (-3) =$                       c).  $-6 \cdot 2 \cdot (-3) \cdot (-4) =$   
d).  $-10 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot (-3) =$                       e).  $-3 \cdot (-2 + 10) =$                       f).  $(-4 + 6) \cdot (-4) =$   
g).  $(-4 + 5) \cdot (-2 + 7) \cdot (-1) =$                       h).  $-3 \cdot (-4) =$                       i).  $|6 + 5| \cdot (-2) \cdot |-6 + 10| =$   
j).  $|6 - 3| \cdot (4 - 6) \cdot (-2) =$

3). Poți să le rezolvi în 5 minute ? Încearcă :

- a).  $-3 + 4 \cdot (-5) =$                       b).  $6 + 3 \cdot (-2) =$                       c).  $7 + 4 \cdot (-3) =$                       d).  $-15 + 5 \cdot (-2) =$   
e).  $6 - 3 \cdot (-4) =$                       f).  $-6 - 8 \cdot (-2) =$                       g).  $-15 - 3 \cdot (-2) =$                       h).  $4 - 5 \cdot (-1) =$

\*\*\*

4). Consolidează-ți cunoștințele și rezolvă :

- a).  $-5 + (-5) \cdot (-2) =$                       b).  $3 - (-3) \cdot 3 =$                       c).  $-4 - (-2) \cdot (-1) =$   
d).  $-5 - (-3) \cdot (-2) =$                       e).  $-2 \cdot (-3) + 4 \cdot (-7) =$                       f).  $6 \cdot (-5) - 5 \cdot 4 =$   
g).  $-4 \cdot (-8) - 3 \cdot 9 =$                       h).  $-6 \cdot (-7) - (-10) \cdot (-4) =$

5). Verifică rezultatul :

- a).  $(2 - 5) \cdot (4 - 2) =$                       R: -6  
b).  $(-2) \cdot (-3) \cdot (4 - 9) \cdot (-1) =$                       R: 30  
c).  $(-2) \cdot (6 - 8) \cdot (5 - 4) \cdot (9 - 10) =$                       R: -4  
d).  $3 \cdot (-5) - (-2) \cdot (-3 + 1) + 8 \cdot (-3) =$                       R: -43  
e).  $-2 \cdot (-4 + 5) \cdot (-3) - (-7 + 5) \cdot (-12 + 14) =$                       R: 10  
f).  $-5 + (-4 + 6) \cdot (-2) - (-8) \cdot 0 + (-12 + 5 + 7) \cdot (-100) =$                       R: -9  
g).  $-7 \cdot (-12 + 5 + 4 - 1) - (-6) \cdot 2 - (-10) =$                       R: 50  
h).  $(-10 + 5) \cdot (-2 + 4) - (-6 + 3) + (-2) \cdot (-8 + 6) =$                       R: -3  
i).  $-6 \cdot (-3 + 5 + 7 - 12) - (-2) \cdot (-1) =$                       R: 16  
j).  $[8 - 4 \cdot (2 - 3)] \cdot (5 - 7) =$                       R: -24  
k).  $(-2) \cdot [(-1) + 4 \cdot (-2) - (-5) \cdot 2] =$                       R: -2  
l).  $[(-3 + 7) \cdot 2 - 5 \cdot (-4 + 6)] \cdot (7 - 9) =$                       R: 4  
m).  $-6 \cdot [-5 + (-7 + 3 - 1) \cdot (-4) - (12 - 8) \cdot 2] - (-5) \cdot (-1) =$                       R: -47  
n).  $(3 - |-4|) \cdot (-7) - (-8) =$                       R: 15  
o).  $|-3 - 3 \cdot (-2)| \cdot (-4) - |-3| =$                       R: -15  
p).  $|5 - 2 \cdot |-6|| - 5 - 2 \cdot (4 - 8)| =$                       R: 4  
r).  $|-5| \cdot (-2) + |-5 + 7 \cdot (-2)| \cdot (-1) =$                       R: -29  
s).  $-2 \cdot |13 - |-17|| - (-16 + 3) \cdot (-1) =$                       R: -21  
t).  $|-3 \cdot (-4) - 15| \cdot (-2) + 5 =$                       R: -1  
u).  $(5 - |-8|) \cdot (-5) - (-7 - |-3|) =$                       R: 25  
v).  $[(-5 + 11) \cdot (-5) + (-8) \cdot (-4)] \cdot (-9) + 21 =$                       R: 3

6). a). Să se afle numărul întreg care este de 5 ori mai mare decât -3.

b). Să se afle numărul întreg al cărui modul este triplul numărului întreg 2.

c). Dacă se scade dintr-un număr întreg produsul dintre 2 și -4, se obține -14. Să se afle numărul.

7). Efectuați :

- a).  $-1 - 2 + 3 - 4 - 5 + 6 - \dots - 58 - 59 + 60 =$                       R: -570  
b).  $1 + 2 - 3 - 4 + 5 + 6 - 7 - 8 + \dots + 77 + 78 - 79 - 80 =$                       R: -80  
c).  $-1 - 2 - 3 - 4 - \dots - 18 + 200 =$                       R: 29  
d).  $-4 - 8 - 12 - \dots - 80 =$                       R: -840

8). Calculați, folosind factorul comun :

- a).  $18 \cdot 17 + 18 \cdot (-10) - 18 \cdot 6 =$   
 c).  $-6 \cdot (-14) + (-6) \cdot 81 - (-6) \cdot 7 =$   
 e).  $-15 \cdot (-80) - 15 \cdot 69 - 15 \cdot (-29) =$

b).  $-5 \cdot 61 - 5 \cdot 9 =$

d).  $20 \cdot (-91) + 20 \cdot 17 - 20 \cdot 4 =$

9). Aflați toate soluțiile  $x$  și  $y$  numere întregi :

a).  $x \cdot y = -12$                       b).  $x \cdot y = 20$

c).  $xy + x = -21$

d).  $xy - 3y = 15$

10). Aflați  $x$ ,  $y$  numere întregi :

a).  $x \cdot y = -30$  și  $|x| = |y| + 1$ ,  $x < y$

b).  $x \cdot y = 42$  și  $|x| = |y| + 1$ ,  $x < y$

## Împărțirea numerelor întregi



### NOTIUNI DE BAZĂ

- se disting trei cazuri :

I. cele două numere sunt naturale

II. cele două numere sunt întregi negative  $a : b = |a| : |b|$

III. un număr este natural iar celălalt este întreg negativ  $a : b = - |a| : |b|$

### EXERCIIȚII

\*

1). Arată că ai înțeles lecția, calculând :

- a).  $8 : (-2) =$                       b).  $-10 : 2 =$   
 e).  $16 : (-4) =$                       f).  $9 : |-3| =$   
 i).  $-24 : |-6| =$                       j).  $-42 : (-14) =$   
 m).  $-54 : (-6) =$                       n).  $-63 : |-3|^2 =$

- c).  $-12 : (-3) =$                       d).  $-15 : 5 =$   
 g).  $-10 : |-2| =$                       h).  $-20 : 4 =$   
 k).  $-56 : (-2) =$                       l).  $72 : (-3) : (-8) =$   
 o).  $-81 : (-3) : (-9) =$

\*\*

2). Verifică rezultatul :

- a).  $(-2) \cdot (-6) : (-3) =$                       R: -4                      b).  $(-10) : 5 \cdot (-1) =$                       R: 2  
 c).  $18 : (-2) \cdot 7 : (-21) =$                       R: 3                      d).  $-16 : |-2|^3 =$                       R: -2  
 e).  $(-10) : (-2) \cdot (-6) : 15 =$                       R: -2                      f).  $-100 : (-50) + (-7) =$                       R: -5  
 g).  $-8 + 20 : (-5) =$                       R: -12                      h).  $-14 : (-7) - (-8) : 2 =$                       R: 6  
 i).  $-12 : (5 - 11) + (-3) : (-1) =$                       R: 5                      j).  $-6 : 3 - (-4) : (-2) + 10 =$                       R: 6  
 k).  $-14 : (-2) + 3 \cdot (-4) =$                       R: -5                      l).  $-12 : (-6 + 3) - (-2) \cdot 5 =$                       R: 14  
 m).  $-2 + 6 : (-2) - (-28) : 2 =$                       R: 0

3). Consolidază-ți cunoștințele și calculează :

- a).  $|-10 + 24| : (-7) =$                       b).  $|-3 - |(-2) \cdot 3| + 1| : (-16 + 12) =$   
 c).  $||-2| \cdot (-6 + 2) + 5 \cdot (-2)|| : (-3 - 1 - 2) =$                       d).  $-12 : |-9 + |(-5) \cdot 4 : 2| + (-5)| =$   
 e).  $-27 : |4 : (-2) - 15 : (-3) - |14 : (-7) - 4|| =$                       f).  $|96 : |32 - 2 \cdot (-8)| + 2 \cdot (-5)| : (-4) =$   
 g).  $-15 : |-3| + 7 =$                       h).  $-10 - |-14 : 2 + 9 : (-3)| =$   
 i).  $-8 : |-1 - 3| + |12 : 6| =$                       j).  $25 : (-10 + 3 + 2) - |-24| : (-6) =$   
 k).  $-26 : [4 \cdot (-3) : 2 : (-6) \cdot (-13)] =$                       l).  $46 : [(-2) \cdot (9 - 17) : (-4) \cdot 5 - 3] =$

4). Dovedește că poți să le rezolvi :

- a).  $(-24) : (-4) + (-6) : 2 =$                       b).  $(-12) : (-8 + 4) + (-10) : 5 =$   
 c).  $[(-7 - 9) : (-4) + (+6)] : 5 =$                       d).  $36 : [(-12) : 6 + (-1)] - (-4) =$   
 e).  $(-8 + 2) \cdot (-3) : (-2) + (-8) : 2 =$                       f).  $(-3) \cdot (8 - 12) : (4 - 6) + (-10) : (10 - 15) =$   
 g).  $[(-5 + 1) : 2 + (-8) : (-2)] : (6 - 7) =$                       h).  $-10 : (5 - 3) - (-4) =$



- i).  $(-6 - 8) : (-7) + (-3) =$   
 k).  $(-6) : 3 + (4 - 5) \cdot (-6 + 8) =$   
 m).  $(-9 + 3) \cdot (-3 + 4) : (-3) - (-6 + 2) =$   
 j).  $(-6 + 5) \cdot (-8 - 2) : (6 - 8) =$   
 l).  $-25 : (10 - 3 \cdot 5) + 12 : (-4) \cdot (-1) =$   
 n).  $-4 + (-6 - 3) : (-2 + 5) - (-8) =$
- 5). Dacă faci primul exemplu, următoarele ți se vor părea ușoare :
- a).  $-8 \cdot (-6) : (-4) - |-16| =$  R : -28  
 b).  $-9 \cdot (-6) \cdot |7 - (-4 + 1)| : (-12) =$  R : -45  
 c).  $[-28 : (-7) - (-30) : (-6)] \cdot 7 - |0 - 4| =$  R : -11  
 d).  $-18 : (-2) : (-3) + |-18| : |-2| =$  R : 6  
 e).  $|-16 : (-2) - (-5) \cdot (-3)|^2 \cdot (-2) : (-14) =$  R : 7  
 f).  $||5 - 8| - 6|^2 : |21 : (-7) + 0|^2 =$  R : 3  
 g).  $||-16 + 9| - |-3| \cdot |4|| : (-5) =$  R : -1  
 h).  $|-8 : (-4) - 15| + (-13) =$  R : 0  
 i).  $|-432 : (-9) : (-4) + (-5) \cdot (-3)|^2 - |-4|^2 =$  R : -7

## Exerciții recapitulative

**\*\***

1). Ai încredere în tine și rezolvă :

- a).  $-117 : (-3) + 5 \cdot (-7) =$  R : 4  
 b).  $-15 \cdot (-8) : 10 - 16 \cdot (-3) : (-2) =$  R : -12  
 c).  $-|-3| \cdot (-5) - |-5|^2 =$  R : -10  
 d).  $-15 - (-2) \cdot |-6 + 2|^2 =$  R : 17  
 e).  $|-16 : (-2) + 5 \cdot (-2)|^2 : (-4) =$  R : -1  
 f).  $[-2 \cdot (-3) \cdot (-1) + (-4)] : (-4 + 9) =$  R : -2  
 g).  $-3 \cdot [(-4 + 2) + (-3 + 4) \cdot (-2)] : (5 - 11) =$  R : -2  
 h).  $-1 \cdot [(-4) + (-2) \cdot (-6) + (-6 - 4) : 2] - (2 - 5) =$  R : 0  
 i).  $\{[-2 + (-3) : (-1)] \cdot (-6) + 4\} : (-7 + 6) =$  R : 2  
 j).  $[-12 + 2 \cdot (-5 + 6)] : (-12 + 7 - 3 + 6) =$  R : 5  
 k).  $-[-3 + 2 \cdot (-4) \cdot (-10 + 5)] : (-1) =$  R : 37  
 l).  $8 : [-6 + 2 \cdot (-3 + 4)] - [(-3) \cdot 2 + (-2) \cdot (-9)] =$  R : -14  
 m).  $2 \cdot [(-12) : (-1 + 3 - 4 + 5) + (7 - 8)] =$  R : -10  
 n).  $- \{8 \cdot [(-5 + 3) - (-1)] - 2 \cdot (-3)\} - (6 - 10) =$  R : 6  
 o).  $[(-3) \cdot (-4 + 12) - (7 - 13) : (-2) : 3] : (-5) =$  R : 5  
 p).  $|-7 - 8| : (-6 + 3) - |-2| \cdot (-7 + 2) =$  R : 5
- 2). Vrei să iei o notă mare ? Calculează :
- a).  $[-6 \cdot (-5 + 2) - (-3)] : (-7) + (4 - 9) =$  R : -8  
 b).  $(-12) : (-6 + 3) - (-2) \cdot 5 =$  R : 14  
 c).  $|-8 + 2 \cdot 3| \cdot (-10 + 15) - |2 - 4| =$  R : 8  
 d).  $2^3 - |-2 + 3| \cdot |-5| + (-7) =$  R : -4  
 e).  $(-8 + 10) \cdot |-5| - |-3 + 3 \cdot 1| \cdot (-4 + 8) =$  R : 10  
 f).  $|-12 + 6 + (-4)| : |-10 + 5| =$  R : 2

g).  $|-3 + 2| \cdot |4 + (-6)| + |-2|^3 =$   
h).  $[(-3) \cdot (9 - 5) - (6 - 10)] : (-2) - |10 - 16| =$   
i).  $[1 - (-3) \cdot 5 + (-2) \cdot 3] : 2 =$   
j).  $[-2 \cdot (5 - 7) + |-4 - 8| - (-2)] : (-3) =$   
k).  $[-3 + 5 \cdot (-2) - (-28) : 4 - (6 - 12)] \cdot (-1) =$   
l).  $-12 : 3 - (-8) \cdot (4 - 5) + 10 : (7 - 9) =$   
m).  $(-5 + 6) \cdot [2 - (-3) \cdot (-2) + (-8)] : (-3) =$   
n).  $(-24) : (32 - 20) - (-6) : 3 =$   
o).  $-[-(7 - 15) : (-4) + (-3 + 5) - (-10)] =$

R: 10  
R: -2  
R: 5  
R: -6  
R: 0  
R: -17  
R: 4  
R: 0  
R: -10

## Divizorii unui număr întreg



### NOTIUNI DE BAZĂ

- un număr întreg  $a$  este divizibil cu un număr întreg  $b$ , dacă există un număr întreg  $c$  astfel încât  $a = b \cdot c$ .
- notație :  $a : b$  („ $a$  se divide cu  $b$ “) și  $b | a$  („ $b$  divide  $a$ “).

### EXERCIȚII

\*

- 1). Să se scrie elementele mulțimilor : a).  $D_{-12}$  ; b).  $D_{18}$  ; c).  $D_{-20}$  ; d).  $D_{25}$  ; e).  $D_{-72}$

\*\*

- 2). Să se efectueze :

a).  $D_{-14} \cap D_{21}$    b).  $D_8 - D_{12}$    c).  $D_{25} \cap D_{35}$    d).  $D_{16} - D_{-20}$    e).  $D_{10} \cap D_{-6}$   
f).  $(D_{12} - D_{18}) \cup D_{-8}$    g).  $D_{14} - (D_{21} \cap D_{-7})$    h).  $(D_{-8} \cup D_{10}) - D_{24}$

- 3). Să se afle  $x \in \mathbb{Z}$  astfel încât :

a).  $\frac{6}{x} \in \mathbb{Z}$    b).  $\frac{-8}{x} \in \mathbb{Z}$    c).  $\frac{5}{x+3} \in \mathbb{Z}$    d).  $\frac{-6}{2x+1} \in \mathbb{Z}$

- 4). Să se afle  $x \in \mathbb{N}$  astfel încât :

a).  $\frac{3}{x} \in \mathbb{N}$    b).  $\frac{-8}{x} \in \mathbb{N}$    c).  $\frac{-4}{x+1} \in \mathbb{Z}$    d).  $\frac{-7}{2x+3} \in \mathbb{Z}$

- 5). Să se afle  $x \in \mathbb{Z}$  astfel încât : a).  $\frac{7}{x+1} \in \mathbb{N}$    b).  $\frac{-6}{x} \in \mathbb{N}$

\*\*\*

- 6). Să se afle  $x$  astfel încât :

a).  $\frac{x+2}{x-1} \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{Z}$    b).  $\frac{x-5}{x+2} \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{N}$   
c).  $\frac{2x+3}{x-1} \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Z}$    d).  $\frac{6x+1}{2x+3} \in \mathbb{Z}, x \in \mathbb{Z}$

- 7). a). Fie  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x : 3, |x| < 20\}$  și  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 21 : x\}$ . Calculează : i).  $A \cap \mathbb{N}$   
ii).  $A \cap B$ .

- b). Numerele întregi  $x$  și  $y$  verifică relația  $3 \cdot |x| - 14 \cdot |y| = 42$ .

i). aflați  $x$  dacă  $|y|$  este număr prim;

ii). aflați  $y$  dacă  $|x|$  este număr prim.

8). Să se arate că :

a).  $\frac{2^{3n+1} + 4^n \cdot 2^{n+2} + 8^n}{7} \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$

b).  $\frac{3 + 3^2 + 3^3 + \dots + 3^{33}}{39} \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$

c).  $\frac{\overline{ab} + \overline{ba}}{11} \in \mathbb{N}, a, b \text{ cifre}$

d).  $\frac{\overline{10bc}}{111} \notin \mathbb{N}, \text{ oricare } b, c \text{ cifre}$

9). Aflați a, b cifre dacă  $\frac{3ab}{75} \in \mathbb{N}$ .

10). Aflați a, b cifre,  $a < b$ ,  $\frac{4ab}{36} \in \mathbb{N}$ .

## Puterea cu exponent număr natural a unui număr întreg



### NOTIUNI DE BAZĂ

- prin  $a^n$  se înțelege produsul numărului a cu el însuși de n ori :  $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n \text{ factori}}$

- proprietăți :  $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$   $(a^m)^n = a^{m \cdot n}$   $a^m : a^n = a^{m-n}$   $(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$

### EXERCITII

\*

1). Calculați :

$(-2)^3; 3^4; (-3)^4; (-1)^5; (-1)^{10}; (-1)^{32}; (-1)^{45}; (-3)^3; (-5)^0; (-11)^2; (-1)^0; (-13)^0; (-13)^2; (-7)^1$ .

\*\*

2). Dovedește că ai înțeles lecția :

a).  $(-2)^2 - 1^0 + (-3)^1 =$  R: 0

b).  $(-5)^2 + (-2)^3 + (-1)^{15} =$  R: 16

c).  $(-3)^3 - (-7)^0 + (-2)^4 =$  R: -12

d).  $(-2)^3 + (-1)^0 - (-3)^2 + (-5)^2 =$  R: 9

e).  $(-10)^2 + 4 \cdot (-3)^3 =$  R: -8

f).  $4^2 : (-2)^3 + (-1)^5 =$  R: -3

g).  $0^2 - (-2)^3 + 5^0 + (-3)^2 =$  R: 18

h).  $(-3)^3 \cdot 4 + (-2)^5 =$  R: 4

i).  $(-2)^4 - (-3)^2 =$  R: 7

j).  $(-2)^3 + (-7)^1 =$  R: -15

k).  $-6 - (-3)^2 + (-2)^3 =$  R: -23

l).  $(-4)^2 + (-6)^2 - (-5) =$  R: -15

m).  $(-2^5) + 3^3 - (-4)^2 =$  R: -21

n).  $(-3^2) + (-3)^2 + (-2^4) =$  R: -16

o).  $2^3 - (-2)^3 + (-1)^{100} =$  R: 17

p).  $(-5)^0 + 3^2 - (-4)^4 =$  R: -246

r).  $2^4 + (-2)^0 - (-3)^3 =$  R: 44

s).  $(-3)^3 + (-1)^{18} - (-7)^0 + (-3)^4 =$  R: 54

3). Verifică rezultatul :

a).  $(-3)^5 \cdot [(-3)^2]^3 =$  R:  $(-3)^{11}$

b).  $(-2)^8 \cdot (-2)^3 \cdot [(-2)^2]^3 =$  R:  $(-2)^{17}$

c).  $(-1)^8 \cdot [(-1)^2]^3 \cdot (-1)^4 =$  R:  $(-1)^8$

d).  $[(-5)^0 \cdot (-5)^1 \cdot (5)^2]^3 =$  R:  $(-5)^9$

e).  $2^5 \cdot (-2)^3 \cdot (-2)^4 : 2^{10} =$  R:  $(-2)^2$

f).  $[(-2)^3 \cdot (-2)^5]^2 : 2^{15} =$  R: 2

g).  $6^3 \cdot (-6)^5 : (-6)^6 =$  R:  $-6^2$

h).  $[(-3)^2]^6 \cdot 3^4 : (-3)^8 =$  R:  $3^8$

i).  $(-7)^2 \cdot 7 \cdot (-7)^9 : 7^{11} =$  R: -7

j).  $[(-2)^3]^2 \cdot 2^8 : [(-2)^2]^6 =$  R:  $2^2$

k).  $[(-5)^2]^2 \cdot (-5)^4 : 5^7 : [5^3 \cdot (-5)^{12}] =$  R: 1

m).  $(-1)^6 : 1^{16} =$  R: 1

l).  $(-6)^3 : (-1)^5 =$  R:  $6^3$

n).  $(-1)^{35} : 1^{35} =$  R: -1

o).  $(-1)^{35} : 1^{35} =$  R: -1

o).  $(-10)^3 \cdot 0^3 =$  R: 0

p).  $[(-3)^2]^6 \cdot (0^1 \cdot 0^2 \cdot 0^3)^2 =$  R: 0

r).  $(-2)^4 : (-1^4 \cdot 3^2)^0 =$  R: 16



4). Calculați :

a).  $(-3)^1 \cdot (-3)^2 \cdot (-3)^3 \cdot \dots \cdot (-3)^{20} =$  b).  $(-7)^1 \cdot (-7)^2 \cdot \dots \cdot (-7)^{49} - (-7)^{(-7)^2 - 25} =$   
 c).  $(-5)^2 \cdot (-5)^4 \cdot \dots \cdot (-5)^{20} : 25^{55} =$

5). Aflați semnul lui x :

a).  $x = (-2) \cdot (-2)^2 \cdot (-2)^3 \cdot \dots \cdot (-2)^{99}$  b).  $(-3) \cdot (-3)^2 \cdot (-3)^3 \cdot \dots \cdot (-3)^{101}$

6). Calculați :

-a).  $(-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + \dots + (-1)^{72}$  b).  $(-1) + (-1)^2 + (-1)^3 + \dots + (-1)^{99}$   
 c).  $(-1)^0 + (-1)^2 + (-1)^4 + \dots + (-1)^{100}$  d).  $(-1) \cdot (-1)^2 \cdot (-1)^3 \cdot \dots \cdot (-1)^{49}$   
 e).  $(-1)^0 - (-1)^1 + (-1)^2 - (-1)^3 + (-1)^4 - (-1)^5 + \dots + (-1)^{100} - (-1)^{101}$

7). Efectuați calculele, dacă k ∈ N :

a).  $(-1)^k + 3 \cdot (-1)^{k+1} - 5 \cdot (-1)^{k+2}$  b).  $(-1)^{2k+1} - 4 \cdot (-1)^{2k} - 3 \cdot (-1)^{2k-1}$   
 c).  $(-1)^{4k+1} - 3 \cdot (-1)^{2k+2} + 5 \cdot (-1)^{k+1}$  d).  $(-2)^{k+1} + (-2)^k + (-2)^k$   
 e).  $(-3)^{k+1} + (-3)^k + (-3)^k + (-3)^k$

8). Efectuați :

a).  $(|4^{33} - 3^{44}| + |4^{33} + 3^{44}|) : 9^{22}$  b).  $(|2^n - 20| - |30 - 2^n|) : (-10)$  știind că  $n > 4$   
 c).  $4^{n+3} : (|2^{2n} - 100| + |60 + 2^{2n}| + |30 + 2^{2n}| + |2^{2n} + 101|)$   
 d).  $(2^{73} - 7 \cdot 2^{70} - 5 \cdot 2^{71}) : (-2)^{69}$

## Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor

\*\*\*

1). Consolidează-ți cunoștințele și rezolvă :

a).  $\{(-3) \cdot [(-3)^2 - 5] - (6 - 10)\} : (-2) - |10 - (-2)^4| =$  R : -2  
 b).  $[1 - (-3) \cdot 5 + (-2) \cdot 3] : 2 =$  R : 5  
 c).  $[-2 \cdot (5 - 7) + |-2^2 + (-2)^3| - (-2)] : (-3) =$  R : -6  
 d).  $[-3 + 5 \cdot (-2) - (-28) : (-2)^2 - (6 + 12)] \cdot (-1) =$  R : 0  
 e).  $\{-[(-4)^2 + (-2^4) : (-2)^2] \cdot (-1) + 3\} : (-5 + 10) =$  R : 3  
 f).  $-12 : 3 - (-2)^3 \cdot (4 - 5) + 10 : (7 - 9) =$  R : -17  
 g).  $-[(7 - 15) : (-2^2) + (-3 + 5) - 2 \cdot (-5)] =$  R : -10

2). Poți să le rezolvi în 10 minute ?

a).  $2^7 \cdot 2 \cdot (-2)^4 - 2^{12} =$  R : 0 b).  $(-12)^2 : (-3) : (-8) + (-3)^2 =$  R : 15  
 c).  $(2^6 \cdot 2^3) : (2 \cdot 2^2 \cdot 2^4) =$  R : 4 d).  $[(-14) : 2 + 5]^3 \cdot (-3) : (-6) =$  R : -4  
 e).  $-6 - 3 \cdot (-2)^2 + (-3)^3 =$  R : -45 f).  $(1 - 4)^3 \cdot (5 - 8)^8 \cdot (-3) : 9^0 =$  R : 1  
 g).  $3^5 \cdot 3^4 \cdot 3^3 \cdot 3 + (-3)^{13} =$  R : 0 h).  $[(-2 + 5)^4 \cdot 3^6] : 3^3 : (-7 + 4)^4 =$  R : 27

3). Verifică rezultatul :

a).  $(-6)^2 : (-9) + (-3)^2 =$  R : 5 b).  $(-5 + 10)^8 : [(-4 + 9)^4 \cdot (-5)^2] =$  R : 25  
 c).  $[(-12) : 3]^2 \cdot 4^3 + (-4)^5 =$  R : 0 d).  $[(-3)^4 \cdot 9^4] : [(-3)^7 : (-3)^5 \cdot 3^9] =$  R : 3  
 e).  $[(-2)^3 + 2^0]^4 \cdot 7^3 : 7^5 - 49 =$  R : 0 f).  $[2 + (-1) \cdot 5]^7 \cdot (-3)^9 \cdot 3^{10} : (-3)^{23} =$  R : -27  
 g).  $5^3 \cdot [(-5) \cdot (-1)]^6 - 5^4 \cdot 5^3 \cdot (-10 + 5)^2 =$  R : 0  
 h).  $[2^0 + (-3)]^2 \cdot (-4 + 6)^5 \cdot (8 - 10)^6 - 2^{10} \cdot (-1 + 3)^3 =$  R : 0

4). Fi perseverent și rezolvă :

a).  $[(-4)^3 : (-8) + 1] : (-3) =$  R : -3 b).  $[-3^2 + (-2)^2]^7 : (-5)^3 : (-5)^2 =$  R : 25  
 c).  $[2^2 - 3^2]^{10} : 125 : 625 =$  R : 5<sup>3</sup> d).  $[(-2)^0 + 2 \cdot (-3)]^6 \cdot (-25)^2 : 5^5 =$  R : 5<sup>5</sup>

- e).  $(-3)^4 \cdot |-3|^5 : (27 \cdot 27 \cdot 9) =$  R: 3  
 f).  $(-14)^2 : (-4) - (-2)^4 \cdot (-3) =$  R: 97  
 g).  $[(-15)^2 : (-25) - 3] : (-4) =$  R: 3  
 h).  $\{[10 : (-5)]^{12} : 64 - 15\} - (-7)^2 =$  R: 0  
 i).  $[(-5)^3 \cdot (-2 + 7)^4 \cdot (-5)] : 5^6 + 5^0 =$  R: 26  
 j).  $[(-16)^2 : (-1)^3 : (-2)^4 - 4] : (-5) =$  R: 4  
 k).  $[(-12)^2 : (-6) : (-2) - (-4)] : (-4) =$  R: -4

5). Să se scrie elementele mulțimilor și să se efectueze :

$$\begin{aligned} A &= \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \text{ divide } -12\} & B &= \{x \in \mathbb{N} \mid |x| < 5\} \\ C &= \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 3\} & D &= \{x \in \mathbb{N} \mid |x| \text{ divide } -20 \text{ și nu divide } 28\} \\ E &= \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 = 9\} & F &= \{x \in \mathbb{N} \mid 6/x \in \mathbb{N}\} \\ G &= \{x \in \mathbb{N} \mid x^2 \leq 9\} & H &= \{x \in \mathbb{Z} \mid -6/x \in \mathbb{N}\} \\ I &= \{x \in \mathbb{Z} \mid 1 < |x| \leq 4\} \end{aligned}$$

- a).  $B - A =$  b).  $A \cap B \cap F =$  c).  $(C \cap I) - E =$   
 d).  $(G - A) \cup C =$  e).  $(I - N) \cap H =$  f).  $(C \cap N) - F =$

\*\*\*

6). Să se calculeze :

a).  $(-1)^k + (-1)^{k-1} + (-1)^{2k-1} + (-1)^{2k-2} =$  b).  $(-1)^n - (-1)^{n-1} - 2(-1)^{n-2} + (-1)^{2n} =$   
 unde  $k, n > 2$  și  $k, n \in \mathbb{N}$ .

7). Să se arate că :

a).  $(-2)^{2n} \cdot 25^n = (-10)^{2n}$ , oricare  $n \in \mathbb{N}$   
 b).  $(-2)^n + (-2)^{n+1} - (-2)^{n+2} = -5 \cdot (-2)^n$ , oricare  $n \in \mathbb{N}$   
 c).  $2 \cdot (-2)^n + (-2)^{n-1} - (-2)^{n-2} - (-2)^{n-3} = -11 \cdot (-2)^{n-3}$ , oricare  $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$   
 d).  $\frac{(-2)^n - (-2)^{n+1}}{3}$  este număr întreg.

8). Să se rezolve în mulțimea  $\mathbb{Z}$  :

a).  $3 - [4 + (-8 - x)] = 1$  b).  $(x + 3) \cdot (y - 4) = 5$  c).  $x \cdot (x + 1) = 6$   
 d).  $x \cdot (x + 2) = 8$  e).  $x \cdot (x - 3) = 10$  f).  $(x - 2) \cdot (x + 5) = -12$   
 g).  $x \cdot y = 2$  h).  $(x + 1) \cdot y = -3$  i).  $-5 - \{4 - [-5 + (-7 + x) - 3] - 5\} = -20$

9). Să se compare :

a).  $(-2)^4$  cu  $(-3)^4$  b).  $(-2)^3$  cu  $(-3)^3$  c).  $(-2)^{51}$  cu  $(-3)^{51}$   
 d).  $(-2)^{240}$  cu  $(-3)^{240}$  e).  $(-2)^{33}$  cu  $(-3)^{22}$  f).  $(-2)^{27}$  cu  $(-8)^9$   
 g).  $(-2)^{10}$  cu  $(-4)^5$  h).  $[(-3)^9]^2$  cu  $(-27)^6$

## Ecuații de forma $x + a = b$ ; $a, b \in \mathbb{Z}$

\*

1). Să se rezolve :

a).  $x + 18 = -21$  b).  $x - 3 = -29$  c).  $x + 13 = 0$  d).  $x + 9 = 3$   
 e).  $x - 17 = -51$  f).  $x + (-5) = 4$  g).  $x + (-7) = -2$  h).  $x + (-2) = -4$   
 i).  $-4 + x = 3$  j).  $-10 + x = 2$  k).  $-12 + x = -4$  l).  $x - (-2) = 3$   
 m).  $x - (-6) = -3$  n).  $x - (-8) = -10$  o).  $x - (-5) = 2$  p).  $x - (-4) = -3$

2). Să se afle numărul întreg care adunat cu  $-3$  este  $-8$ .

3). Să se afle un număr întreg, știind că dacă se scade 2 din el se obține  $-8$ .

4). Să se afle numărul întreg al cărui modul este cu  $-6$  mai mic decât  $-11$ .

5). Să se rezolve în  $\mathbb{Z}$  :

- |                      |        |                      |       |                  |       |
|----------------------|--------|----------------------|-------|------------------|-------|
| a). $-4x = 16$       | R: -4  | b). $-5x = -20$      | R: 4  | c). $3x = -9$    | R: -3 |
| d). $x : (-3) = 4$   | R: -12 | e). $x : (-4) = -13$ | R: 52 | f). $7x = -63$   | R: -9 |
| g). $18 : (-x) = 2$  | R: -9  | h). $-9 : x = -1$    | R: 9  | i). $8 : x = -2$ | R: -4 |
| j). $16 : (-x) = -4$ | R: 4   | k). $-27 : (-x) = 3$ | R: 9  |                  |       |

\*\*\*

6). Să se rezolve :

- |                         |   |
|-------------------------|---|
| a). $x + 16 - 30 = -5$  | d). $x + (-5 + 1) - 6 = -(-7) + 1$                    |
| b). $-(2 - 3) + x = 21$ | e). $x + (-6) - (-7) = -[-2 - (3 - 1)]$               |
| c). $x - (6 - 2^2) = 0$ | f). $-2 - (4 - 3) - (3 - 4) + x = -(3^2 - 3^1 - 3^0)$ |

7). Să se rezolve :

- |   |   |
|---|---|
| a). $x -  -6  = 3 +  -8 $                 | b). $x +  2 - 6  = 4^2 -  -2 $                          |
| c). $ 3^2 - 6 - 2^2  + x = 6^2 : 3^2 - 5$ | d). $  4 - 8  - 8  + x = 3 -  7 -  6 - 15  $            |
| e). $2 \cdot  3 - 4  + x =  6 - 12  : 3$  | f). $x + [ -12  : 2^2 + 1]^3 = -14$                     |
| g). $ -8 + (-8)  :  -2  + x =  -2 ^2$     | h). $[-(4 - 6)] \cdot (3^3 : 9) + x = -(2 \cdot 5 - 6)$ |

8). Aflați  $x \in \mathbb{Z}$  pentru care sunt adevărate propozițiile :

- |                           |                       |                                 |
|---------------------------|-----------------------|---------------------------------|
| a). $ x + 1  = 5$         | b). $ x + 2  = 6$     | c). $ x + 3  = 0$               |
| d). $ x - 6  = 0$         | e). $ x - 6  = 8$     | f). $ x - 5  = 18$              |
| g). $ x - 2  = -3$        | h). $ x - 4  + 3 = 4$ | i). $ x + 1  - (3 - 8 + 4) = 0$ |
| j). $2 \cdot  x + 3  = 4$ | k). $  x  + 3  = 7$   | l). $  x  - 5  = 2$             |

9). Să se rezolve în  $\mathbb{Z}$  :

- |                     |       |                          |       |                                      |       |
|---------------------|-------|--------------------------|-------|--------------------------------------|-------|
| a). $3x + 8 = 2$    | R: -2 | e). $4(5 - x) = -24$     | R: 11 | i). $-8 - 9x = 19$                   | R: -3 |
| b). $4x - 16 = -20$ | R: -1 | f). $5 - 8x = -27$       | R: 4  | j). $-8 = 4 + 3(x + 2)$              | R: -6 |
| c). $18 - 5x = 23$  | R: -1 | g). $2(x - 3) - 8 = -18$ | R: -2 | k). $4 + 10x = -16$                  | R: -2 |
| d). $4(5 - x) = 24$ | R: -1 | h). $2(1 - x) = -10$     | R: 6  | l). $3x - 4 \cdot [-5 + (-2)^2] = 1$ | R: -1 |

10). Să se rezolve în  $\mathbb{Z}$  :

- |                      |                   |                          |                   |                   |                     |
|----------------------|-------------------|--------------------------|-------------------|-------------------|---------------------|
| a). $x^2 + 5 = 9$    | $x \in \{-2; 2\}$ | b). $x^2 - 2 = 14$       | $x \in \{-4; 4\}$ | c). $8 - x^2 = 4$ | $x \in \{2; -2\}$   |
| d). $3x^2 = 27$      | $x \in \{-3; 3\}$ | e). $4x^2 = 196$         | $x \in \{-7; 7\}$ | f). $2x^2 = 288$  | $x \in \{-12; 12\}$ |
| g). $3x^2 + 1 = 109$ | $x \in \{-6; 6\}$ | h). $4x^2 - 5 = 31$      | $x \in \{-3; 3\}$ |                   |                     |
| i). $5x^2 - 6 = -26$ | $x \in \emptyset$ | j). $2(x^2 + 1) - 7 = 3$ | $x \in \{-2; 2\}$ |                   |                     |

## Inecuații în $\mathbb{Z}$

\*\*\*

1). Rezolvați în  $\mathbb{Z}$  :

- |                                  |                      |                               |                      |
|----------------------------------|----------------------|-------------------------------|----------------------|
| a). $2x - 3 \leq 7$              | R: $\{...; 4; 5\}$   | b). $4x + 5 < 9$              | R: $\{...-1; 0\}$    |
| c). $4 - 2x \geq 10$             | R: $\{...-4; -3\}$   | d). $-8 + 5x \leq -8$         | R: $\{...-1; 0\}$    |
| e). $8 < 9 - x$                  | R: $\{...-1; 0\}$    | f). $10 \leq 4 + 3x$          | R: $\{2; 3; ...\}$   |
| g). $2(x + 1) \geq -8$           | R: $\{-3; -2; ...\}$ | h). $3(x + 6) \leq -9$        | R: $\{...-10; -9\}$  |
| i). $5 + 2(x - 1) \geq 7$        | R: $\{2; 3; ...\}$   | j). $9 - 3(x + 2) < -3$       | R: $\{3; 4; ...\}$   |
| k). $10 < 3(x + 8) + 1$          | R: $\{-4; -3; ...\}$ | l). $-6x - 13 \leq 29$        | R: $\{-7; -6; ...\}$ |
| m). $-8 \cdot (-x) + 4 \geq -20$ | R: $\{-3; -2; ...\}$ | n). $12 + 3 \cdot (-2x) > 0$  | R: $\{...0; 1\}$     |
| o). $(-4x) : 2 + 6 > -4$         | R: $\{...3; 4\}$     | p). $(-9x) : (-3) + 2 \leq 7$ | R: $\{...0; 1\}$     |



## 2). Rezolvați în $\mathbb{Z}$ :

- a).  $-5(2 - |x|) < 10$  R:  $\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$  b).  $|x - 1| < 1$  R:  $\{1\}$   
 c).  $3|x + 1| \leq 6$  R:  $\{-3; -2; -1; 0; 1\}$  d).  $2|x| \leq -4$  R:  $\emptyset$   
 e).  $-2|x| + 3 > -5$  R:  $\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$  f).  $-2 \cdot |2x| \geq 8$  R:  $\emptyset$   
 g).  $2(|x| + 1) \leq 8$  R:  $\{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$  h).  $|x| \leq 2$  R:  $\{-2; -1; 0; 1; 2\}$

## Exerciții recapitulative

### 1). Comparați:

- a). 5,16 cu 5,6 b). 2,3 cu 3,2 c). 1,2 cu 1,20 d). 1,375 cu 1,37  
 e). 5,(3) cu 5,(32) f). 4,(6) cu 4,6 g).  $\frac{11}{6}$  cu 1,9

### 2). Găsiți a 70 zecimală a numerelor: a). $\frac{1}{11}$ ; b). $\frac{1}{22}$ .

### 3). Puneți numere naturale consecutive în locul punctelor: $\frac{8}{3} < \dots < \frac{13}{4} < \dots$

### 4). Puneți numere raționale în locul punctelor: $\frac{8}{7} > \dots > \frac{9}{8} > \dots > 1,124$

### 5). Demonstrați că:

- a).  $\frac{24}{2, (x) + x, (6)} \in \mathbb{N}$  b).  $2,5(7) + 3,4(2) \in \mathbb{N}$  c).  $\frac{2,4(3) + 0,3(6)}{0,04} \in \mathbb{N}$   
 d).  $0,(1) + 0,(2) + \dots + 0,(8) \in \mathbb{N}$  e).  $\frac{0, \overline{x+1}, \overline{x+2}, \overline{x+\dots+9}, \overline{x}}{1, (x) + 2, (x) + \dots + 9, (x)} \in \mathbb{N}$

### 6). Ordonăți:

- a).  $0,831; 0,8(31); 0,83(1); \frac{4}{5};$  b).  $0,63; 0,633; 0,663; \frac{7}{11}; \frac{19}{30};$  c).  $0,36; 0,366;$   
 $0,336; \frac{4}{11}; \frac{11}{30}$

### 7). Să se afle $x$ din proporțiile:

- a).  $\frac{3}{x+4} = \frac{6}{8}$  R:  $x = 0$  b).  $\frac{3x-4}{0,2} = \frac{\frac{5}{8}}{\left(-\frac{7}{8}\right)}$  R:  $x = \frac{9}{7}$   
 c).  $\frac{y+2}{3x-2} = \frac{30}{24}$ , unde  $y$  este soluție pentru ecuația  $5(y+1) = y+17$  R:  $x = 2$

### 8). Să se afle $x$ din proporția:

- a).  $\frac{\overline{1aa}}{x} = \frac{125^3 : (5^4)^2}{\left(\frac{1}{4} + 1\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{2^3}{7}}$ , unde  $\overline{1aa} : 25$  R:  $100; x = 40$   
 b).  $\frac{\overline{a1b}}{36} = \frac{x+10}{4}$ , unde  $\overline{a1b}$  este cel mai mic număr divizibil cu 12. R:  $126; x = 14$

### 9). Să se afle numerele naturale $x$ și $y$ dacă raportul lor este $\frac{4}{6}$ și media lor aritmetică este 10. R: 12; 8

### 10). Să se afle numerele naturale $a, b, c$ dacă sunt direct proporționale cu numerele 2, 6, 4 și $a+2c=45$ .

### 11). Să se afle numerele naturale $a, b, c$ dacă sunt invers proporționale cu 8, 3, 4 și $(a, b) = 3$ .

### 12). Să se afle trei numere naturale $a, b, c$ știind că media aritmetică a primelor două numere este 21, cel mai mare divizor comun al lui $a$ și $b$ este 7, iar primul și ultimul sunt direct proporționale cu 7 și 2.

### 13). Aflați $a$ și $b$ dacă sunt invers proporționale cu soluțiile ecuațiilor: $3x+4=16, 2y-6=y$ iar $a+b$ este 15.

14). Arătați că, dacă numerele  $\overline{ab}$  și  $\overline{ba}$  sunt direct proporționale cu cifrele lor, atunci ele se divid cu 11.

15). Doi muncitori produc în 4 ore 120 piese. Știind că al doilea face singur în 5 ore, 70 piese, să se afle câte piese realizează primul lucrând singur în 6 ore?

16). Două robinete umplu împreună un bazin în 6 ore. Știind că primul umple bazinul singur în 9 ore, aflați în câte ore umple bazinul singur al doilea robinet?

17). Să se afle două numere naturale știind că unul dintre ele este cu 180 mai mic decât celălalt, diferența care reprezintă 40% din suma lor.

18). Să se afle ce sumă a depus o persoană la bancă cu 5% dobândă dacă are 2625 lei la sfârșitul anului.

19). Să se afle prețul unei cărți dacă după două reduceri de preț cu 10% și 5%, costă 17,1 lei.

20). Prețul unui ceas a fost redus de două ori cu 25% și 10%. Dacă prețul intermediar a fost de 75 lei, cât costa inițial și cât costă în final?

21). Un drumeț merge în prima zi 30% din drum, a doua zi 40% din rest și în a treia zi restul de 8,4 km. Câți km are drumul?

22). Dacă numărul a este 50% din b, să se afle cât la sută reprezintă a din suma lor. Dar b din suma lor?

23). Dacă numărul a este 30% din suma a + b să se afle cât la sută reprezintă b din a.

24). Să se calculeze:

a).  $(-2)^3 \cdot 2^3 : 4^3 + (-1)^{19} =$

c).  $[(-4)^2 + (-5) \cdot 3 + (-1)^4]^3 - 3^3 =$

e).  $[(-3)^3 + (-5)^2] \cdot (-5)^2 + (-7)^2 =$

b).  $[-4 - (-7)] \cdot (-5) + (-3) \cdot (-4) \cdot (-1) =$

d).  $[(-15)^2 : (-3) + (-8)^2] : (-11) =$

f).  $[(-2)^8 \cdot 3]^6 : (-2)^{45} : 9 =$

25). Să se calculeze:

a).  $(-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + \dots + (-1)^{50} =$

c).  $(-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + \dots + (-1)^n =$

b).  $(-1)^0 + (-1)^1 + (-1)^2 + \dots + (-1)^{99} =$

d).  $(-1)^0 \cdot 0 + (-1)^1 \cdot 1 + \dots + (-1)^{100} \cdot 100 =$

26). Să se calculeze:

a).  $(2^{33} - 3^{22}) + 2 \cdot 4^{16} : 9^{11} =$

b).  $[5^{68} - 3^{102}] + [2^{153} - 3^{102}] - [3^{34} \cdot 9^{34} + 3^{102}] + [-25^{34}] : (-4)^{76} =$

27). Să se calculeze:

a).  $[(-2)^n + 2^n] : 2^n =$

d).  $(-5)^{2n} + 5^{2n+1} - 25^{n+1} =$

b).  $4^{101} + (-4)^{99} + 3 \cdot 4^{100} =$

e).  $8^n + 4^n \cdot 2^{n+2} - 2^{3n+2} =$

c).  $5^{67} + 3 \cdot 5^{66} - 2 \cdot 5^{68} =$

28). Să se arate că:

a).  $(15^{n+1} + 3^n \cdot 5^{n+1} - 3^{n+2} \cdot 5^n) : 11$

b).  $(2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{60}) : 105$

29). Să se compare:

a).  $3^{136}$  cu  $4^{104} - 3 \cdot 4^{103} - 3 \cdot 4^{102}$  R: I < II

c).  $(-3)^{18}$  cu  $(-5)^{12}$  R: I > II

e).  $(-11)^{14}$  cu  $(-5)^{21}$  R: I > II

b).  $(-6)^{18}$  cu  $(-2)^{45}$  R: I > II

d).  $(-3)^9$  cu  $(-5)^6$  R: I < II

30). Să se rezolve în Z:

a).  $3 + x = -11$  R: -14

b).  $x - 17 = 0$  R: x = 17

c).  $x + 18 = 0$  R: -18

d).  $x + 14 = -3$  R: -17

e).  $4x = -8$  R: x = -2

f).  $3x = -8$  R: x ∈ ∅

31). Să se rezolve în Z:

a).  $2x + 1 = -4$  R: x ∈ ∅

b).  $5x + 6 = -4$  R: x = -2

c).  $3 + 2x = 5x + 9$  R: -2

d).  $3(x + 2) + 7 = x + 3$  R: -5

e).  $3 - 2 \cdot (x + 1) = 2 - x$  R: x = -1

f).  $4x - 5[2(x + 1) - 3] = 5$  R: x = 0

g).  $3 - 2\{4x - 5[3x - 2(x + 1)] + 1\} = 13 + 8x$

R: x ∈ ∅

32). Să se rezolve în  $\mathbb{Z}$  :

a).  $x \cdot y = 15$     b).  $x(y + 1) = 5$     c).  $x(x + 3) = 4$     d).  $2x - yx = 7$     e).  $2xy = x + 6$

33). Să se rezolve în  $\mathbb{Q}$ :

a).  $-10 : |x + 2| = -2$     R :  $x = 3; x = -7$     b).  $4 \cdot |x - 1| - 10 = 2 \cdot |x - 1|$     R :  $x = 6; x = -4$

c).  $|2x + 3| : (-2^2) = 8$     R :  $x \in \emptyset$     d).  $25 : |x + 3| - 12 = -7$     R :  $x = 2; x = -8$

e).  $|3x - 1| \cdot (-2) = -3 \frac{1}{4}$     R :  $x = \frac{5}{2}; x = \frac{11}{6}$     f).  $21 : |2x + 1| = -2 \frac{1}{3}$     R :  $x \in \emptyset$

g).  $||x| + 5| = 8$     R :  $x = 3; x = -3$     h).  $|2^x - 8| + |3y - 27| = 0$     R :  $x = 3; y = 9$

i).  $|x| + |y + 1| = 0$     R :  $x = 0; y = -1$

34). Să se afle media aritmetică a numerelor :

a). 8 și 72; b). 20 și 45; c). 0,5 și 2.    R : a).40; b).32,5; c).1,25

35). O carte este deschisă la întâmplare. Stabiliți numerele celor două pagini care le priviți, dacă suma celor două pagini este 257.

36). Mama are 1250 lei în bancnote de 50 lei și 100 lei. Să se afle numărul de bancnote din fiecare fel știind că numărul total este de 15.

37). Tatăl lui Victor are de efectuat un anumit număr de piese. El trebuie să lucreze câte 25 piese pe zi pentru a le termina la data stabilită. Lucrând câte 45 piese, el le termină cu 4 zile mai devreme. Câte piese a avut de lucrat

38). Alina a cumpărat într-o zi 2 kg de mere și 2 kg de prune, plătind 7 lei. În altă zi a cumpărat, cu aceleași prețuri unitare, 3 kg mere și 2 kg prune plătind în total 8,5 lei. Câți lei costă kilogramul din fiecare produs ?

39). Să se determine un număr natural știind că, scăzând din el o cincime, apoi o pătrime din rest se obține 150.

40). Diana are o sumă de bani. În prima zi cheltuiește o jumătate din sumă, a doua zi o treime din rest, a treia zi o jumătate din noul rest. După aceste cheltuieli îi mai rămân 10 lei. Să se determine suma pe care Diana a avut-o de la început.

41). Ștefan cumpără 4 pixuri și 5 gume, plătind 15,3 lei. Știind că un pix costă cât 3 gume, să se afle cât costă un pix și cât costă o gumă ?

42). Violeta cumpără 4 kg cartofi și 3 kg roșii plătind 12 lei. Să se afle cât costă 1 kg de cartofi știind că este de două ori mai ieftin decât 1 kg de roșii ?

43). Triplul unui număr adunat cu dublul celui de-al doilea dă suma 3024. Să se afle al doilea număr știind că el reprezintă dublul primului număr.

44). O echipă de 8 muncitori sapă un șanț în 9 zile. În câte zile execută aceeași lucrare o echipă formată din 12 muncitori, dacă norma zilnică este aceeași ?

45). În 15 cutii sunt 2055 de bile. Câte bile sunt în 39 cutii ?

46). 23 cutii cu bomboane costă 241,5 lei. Cât costă 6 cutii cu bomboane ?

47). Dacă un avion de vânătoare a străbătut în 8 minute distanța de 48 km, în câte minute va parcurge o distanță de 60 km ?

48). Un automobil pleacă din localitatea A spre localitatea B și merge cu 75 km/h. După două ore, un alt automobil care merge cu viteza de 90 km/h pleacă tot din A spre B. Ele ajung în același timp în localitatea B. Care e distanța dintre cele două localități ?

49). Distanța dintre cele două localități, A și B, este de 60 km. Din aceste localități pleacă, în același timp, doi bicicliști unul spre celălalt. Primul are viteza de 9 km/h, iar celălalt 11 km/h.



După cât timp se întâlnesc și la ce distanță de orașul A ? Dar de orașul B ?

## Testul 1

1). Puneți semnul < sau > pentru a obține propoziții adevărate:

③1p a).  $-5 \dots -5$       ③1p b).  $-3 - 4 \dots -1$

2). Calculați :

⑤1p a).  $4 - (8 - 10)$       ⑤1p b).  $-7 - 2 \cdot (-3)$

3). Dacă  $x \in \mathbb{Z}$  și :

⑤1p a).  $2x = -10 \Rightarrow x = \dots$       ⑤1p b).  $x + 8 \geq 0 \Rightarrow x \in \dots$

⑦1p 4). Valoarea absolută a numărului  $3 \cdot 8 - 4 \cdot 7$  este .....

5). ⑦1p a).  $-14 : (-2) - 2^3 = \dots$       ⑦1p b).  $4 - 5x = 19 \Rightarrow x = \dots$

6). ⑩1p a). Să se afle toate valorile întregi ale lui  $x$ , pentru care  $2 \cdot |x| - 3 \leq 3$ .

⑩1p b).  $[4 : (|6 - 8| - 6) + |-5|]^2 : (-2)^{11}$

⑩1p 7). Elementele mulțimii  $\left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{-6}{x} \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ x \in \mathbb{Z} \mid \frac{2}{x} \in \mathbb{Z} \right\}$  sunt .....

## Testul 2

⑤1p 1). Cel mai mare număr întreg negativ de 2 cifre este .....

⑤1p 2). Să se reprezinte într-un sistem de axe ortogonale punctele : A(-2; 5); B(4; -3); C(-1; -6); D(0; 6).

3). Puneți semnul < sau > pentru a obține propoziții adevărate :

⑤1p a).  $-5 \cdot (-2) \dots -10$       ⑤1p b).  $0 \dots 4 - 9$

⑦1p 4). Valoarea absolută a numărului  $x = (|-18| + |-4|) : (-2)$  este .....

5). ⑦1p a). Să se compare cel mai mic număr întreg de 2 cifre cu numărul (-100).

⑦1p b).  $(-6)^2 - (-2)^5 = \dots$

⑨1p 6). Să se rezolve în  $\mathbb{Z}$  :  $2(x - 2) - \frac{3}{2}x = x - 3$ .

⑨1p 7). Să se calculeze :  $(-10) : [(-3 + 5) \cdot (-2) + (-3)^2] - |-7 + (-2)^3| : (-5 + 2)$ .

⑩1p 8). Să se determine  $x \in \mathbb{Z}$  astfel încât :  $\frac{2x + 5}{2x - 1} \in \mathbb{Z}$ .



1). Într-o cameră în care sunt 7 scaune, intră 3 doamne, fiecare dintre ele având două fiice. Pe un scaun încapă o singură persoană. E posibil ca totuși niciuna din ele să nu stea în picioare?

2). Care este orașul care nu se încadrează în șir : Paris, Zürich, Madrid, Budapesta ?

3). Dacă ziua de alățăieri este cu 3 zile după Luni, atunci ce zi este azi ?

4). Ana este a treisprezecea ca medie pe lista crescătoare a mediilor și tot a treisprezecea pe lista descrescătoare a mediilor în clasa ei. Câți elevi sunt în clasă ?

5). În stânga ta, la o masă rotundă, sunt 8 persoane. Câte persoane sunt în dreapta ta ?

6). Pot verișorii tăi să aibă o verișoară comună pe care tu să nu o ai ?

7). Ai o balanță și 9 cutii, 8 de aceeași greutate și una mai grea. Din câte încercări poți găsi cutia mai grea ?

8). Câte ouă poți mânca dimineața pe stomacul gol ?

9). Ce număr nu ar trebui să fie în șir : 473, 594, 681, 297 ?

10). Ce număr nu se încadrează în următorul șir : 1, 2, 3, 5, 7, 8, 13 ?

11). Alege ce e în plus : măr, pară, ananas sau prună.

**Capitolul VII**  
**MODELE DE LUCRĂRI SEMESTRIALE**  
**SEMESTRUL II**

**Testul 1**

**Partea I**

1). Alegeți răspunsul corect :

- |                                   |          |
|-----------------------------------|----------|
| a). $-5 + 11 =$                   | 1). $-6$ |
| b). $-5 \cdot 8 + (-6)^2 =$       | 2). $-4$ |
| c). $-32 : (-4) + 7 \cdot (-2) =$ | 3). $6$  |
| d). $-2 + (-3)^0 + (-4)^1 =$      | 4). $4$  |
|                                   | 5). $-5$ |

2). Completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate :

- a). Dacă  $\frac{12}{x} = \frac{28}{21}$  atunci  $x = \dots$
- b). Dacă 20% din  $a$  este 15 atunci  $a = \dots$
- c). Dacă două unghiuri interne de aceeași parte a secantei sunt invers proporționale cu 7 și 11, atunci măsurile lor sunt  $\dots$
- d). Un triunghi dreptunghic cu un unghi de  $30^\circ$  și ipotenuza de 12 cm are o catetă de  $\dots$  cm.

**Partea a II-a**

La următoarele probleme se cer rezolvări complete.

3). Rezolvați în  $\mathbb{Z}$  :      a).  $2 - 3(x+1) = 5$       b).  $4x + 1 = -19$

4). Aflați numerele  $x$  și  $y$  dacă sunt direct proporționale cu 5 și 6 și  $4x - 3y = 6$ .

5). Aflați măsura unui unghi dacă aceasta este egală cu 80% din măsura complementului său.

6). Un copil și-a rezolvat tema astfel : în prima zi 20% din temă, în a doua zi  $\frac{3}{10}$  din temă și în a treia zi restul.

a). În ce zi a lucrat cel mai mult ?

b). Dacă în a treia zi a lucrat 10 exerciții, câte exerciții avea tema ?

7). Triunghiurile  $\triangle ABC$  și  $\triangle DBC$  sunt isoscele de baze  $BC$ .

a). Arătați că  $AD \perp BC$ .

b). Știind că  $AD \cap BC = \{O\}$  și  $(AO) = (DO)$ , demonstrați că  $\angle BAC \equiv \angle BDC$ .

**Testul 2**

**Partea I**

1). Găsiți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții :

- a). Un triunghi isoscel are toate unghiurile egale.
- b). Un triunghi obtuzunghic are două unghiuri obtuze.

c). Mediana împarte un triunghi în două triunghiuri echivalente.

d). Dacă în  $\triangle ABC$  se ştie  $\angle A \equiv \angle B$  atunci  $AC = BC$ .

e).  $(-1)^{17} > (-1)^8$ .

2). Completați spațiile libere, pentru a obține propoziții adevărate :

a). Dacă  $\frac{2x+1}{x+4} = \frac{3}{2}$  atunci  $x = \dots$

b). În triunghi cu unghiurile direct proporționale cu 2, 3, 5 este triunghi .....

c). Un triunghi dreptunghic cu un unghi de  $45^\circ$  este triunghi .....

d). Un triunghi are o latură de 12 cm și înălțimea corespunzătoare ei reprezintă  $\frac{5}{6}$  din latură.

Atunci aria triunghiului este egală cu .....

## Partea a II-a

La următoarele probleme se cer rezolvări complete.

3). Rezolvați în  $\mathbb{Z}$  : a).  $2 - 3x = 10 - 4x$

b).  $|x + 1| = 6$

4). Calculați : a).  $|-5 + 3| \cdot 2^3 - (-3)^2 =$

b).  $|3 \cdot (-8) + 4| : (-2) - 4 \cdot (-2) =$

5). Calculați probabilitatea ca, alegând la întâmplare un număr impar natural mai mic decât 100, acesta să fie pătrat perfect.

6). O persoană a cheltuit  $\frac{2}{5}$  din suma pe care o avea și i-au mai rămas cu 20 de lei mai mult decât a cheltuit. Ce sumă a avut la început ?

7). Fie  $\triangle ABC$  oarecare și  $M$  mijlocul lui  $(BC)$ . Din  $M$  se duc  $MF \parallel AB, F \in (AC), MN \parallel AC, N \in (AB)$ .

a). Arătați că  $\triangle BNM \equiv \triangle MFC$ .

b). Demonstrați că  $NF \parallel BC$ .

## Testul 3

### Partea I

1). Rezultatul calculului  $(-24) : (+6) - (-15) \cdot 2$  este egal cu .....

2). Dacă măsurile unghiurilor unui triunghi sunt direct proporționale cu numerele 4, 6 și 8, atunci cel mai mare are măsura de .....

3). Știind că  $\frac{x}{3} = \frac{63}{7}$ , valoarea lui  $x$  este .....

4). Un triunghi isoscel are două din laturile sale de 4 cm respectiv 10 cm. Perimetrul său este egal cu .....

5). 35% din 740 este egal cu .....

6). Dacă  $\triangle ABC \equiv \triangle MPN$  și  $m(\angle B) = m(\angle P) = 90^\circ$  iar  $m(\angle A) = 56^\circ$  atunci  $m(\angle N) = \dots$



7). Frația  $\frac{5}{2x-1} \in \mathbb{Z}$ ,  $x \in \mathbb{Z} - \mathbb{N}$  pentru  $x \in \{\dots\}$ .

8). Soluția ecuației  $3(5-x) = 21$ ,  $x \in \mathbb{Z}$  este egală cu .....

### Partea a II-a

La următoarele probleme se cer rezolvări complete.

9). Să se calculeze :  $-2^2 - (-2)^4 : 2^3 - 60 : (-15)$

10). Fie  $\triangle ABC$  cu  $(AB) \equiv (AC)$ ,  $BE \perp AC$ ,  $E \in (AC)$  și  $d(C; AB) = CD$ ,  $D \in (AB)$ . Să se demonstreze că  $(CD) \equiv (BE)$  și  $(BD) \equiv (EC)$ .

11). Fie  $\triangle ABC$  dreptunghic ,  $m(\angle A) = 90^\circ$  și  $m(\angle C) = 60^\circ$  Dacă  $BC = 10$  cm să se afle perimetrul  $\triangle ACM$  unde  $M \in (BC)$  astfel încât  $BC = 2 MC$ .

### Testul 4

#### Partea I

1). Calculați :  $|-8 + 2 \cdot 3| = \dots$

2). Mulțimea soluțiilor ecuației  $|2x - 1| = 9$  este  $S = \{\dots\}$ .

3). Măsura unui unghi de la baza unui triunghi dreptunghic isoscel este egală cu .....

4). Dacă  $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ , atunci  $\frac{3x + 2y}{x + 3y} = \dots$

5). Un dreptunghi are perimetrul de 60 cm și lățimea este 20% din acesta. Aria lui este egală cu .....  $\text{cm}^2$ .

6). Trei numere sunt invers proporționale cu numerele 0,2; 0,(3) și 0,25 iar media aritmetică a primelor două este 40. Al treilea număr este egal cu .....

7). Un elev avea de rezolvat 75 de probleme. El a rezolvat doar 15 probleme. Raportul procentual reprezentând cât mai are de rezolvat este .....

8). Dacă  $\triangle ABC \equiv \triangle MNP$ . Perimetrul  $\triangle ABC$  este egal cu 36 cm,  $AB = 12$  cm și  $MP = 18$  cm. Lungimea  $NP$  este egală cu .....

### Partea a II-a

La următoarele probleme se cer rezolvări complete.

9). Să se calculeze :  $[4 + 5 \cdot (-2) - (-35) : 5 - (3 - 9)] : (-1)$

10). În  $\triangle ABC$ ,  $(AB) \equiv (AC)$ , bisectoarele unghiurilor  $\angle B$  și  $\angle C$  se intersectează în  $M$ . Să se afle  $m(\angle BMC)$  dacă  $m(\angle A) = 42^\circ$ .

11). Fie  $\triangle ABC$  echilateral și punctele  $D \in (AC)$  și  $E \in (BC)$  astfel încât  $(AD) \equiv (BE)$ . Să se demonstreze că  $DE \parallel AB$ .

# GEOMETRIE

## Capitolul VIII

### DREAPTA



#### NOTIUNI DE BAZĂ

- un punct  $A$  aparține dreptei  $a$ , adică  $A \in a$  dacă punctul  $A$  se află pe dreapta  $a$ ;
- două puncte distincte determină o singură dreaptă;
- se numesc puncte coliniare trei puncte sau mai multe puncte care se află pe o dreaptă;
- se numesc drepte concurente două drepte sau mai multe drepte care au un punct comun.

#### PROBLEME

\*

- 1). Să se deseneze dreapta  $AB$  și punctele  $C$  și  $D$  astfel încât  $C \in AB$  și  $D \notin AB$ . Aflați  $AB \cap CD$ .
- 2). Fie figura alăturată : a). să se scrie cărei drepte aparține fiecare punct; b). găsiți toate punctele care să aparțină unei singure drepte; c). scrieți punctele coliniare; d). dați exemple de 4 puncte necoliniare și trei din ele să fie coliniare; e). dați exemple de 4 puncte necoliniare și oricare dintre ele să fie coliniare.

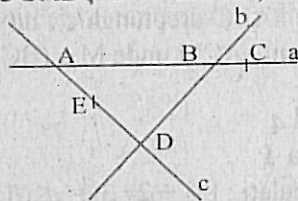


Fig. 1

\*\*

- 3). Să se deseneze dreptele concurente  $AB$  și  $CD$  astfel încât  $AB \cap CD = \{C\}$  și  $E \in AB$ ,  $E \neq A$ ,  $E \neq B$ ,  $E \neq C$ . Care din următoarele afirmații sunt adevărate : a).  $C \in AB$ ; b).  $E \in CD$ ; c).  $D \in AB$ ; d).  $A \in CD$ ; e).  $ED \cap AB = \{C\}$ ;  $ED \cap CD = \{D\}$ ; g).  $ED \cap AB = \{E\}$  ?
- 4). Să se deseneze dreptele concurente  $AB \cap CD = \{O\}$  și  $E \in CD$ . Care din următoarele afirmații sunt adevărate : a).  $O \in AB$ ; b).  $O \notin CD$ ; c).  $E \in AB$ ; d).  $A, O, B$  puncte coliniare; e).  $A, B, C$  puncte coliniare; f).  $E, O, C, D$  puncte coliniare ?
- 5). Să se deseneze patru puncte astfel încât oricare trei dintre ele sunt coliniare. Cum sunt cele patru puncte ?
- 6). Să se deseneze patru puncte astfel încât doar trei dintre ele să fie coliniare. Câte drepte distincte se pot desena ?
- 7). Să se deseneze trei puncte necoliniare. Câte drepte distincte se pot construi ?
- 8). Să se deseneze trei drepte concurente, două câte două în punctele  $A, B, C$  și  $E \in AB$  și  $F \in EC$ . Care din următoarele afirmații sunt adevărate : a).  $B \in EA$ ; b).  $A, E, B$  puncte necoliniare; c).  $F \in AB$ ; d).  $F, E, C$  puncte coliniare; e).  $A, B, C$  puncte coliniare ?
- 9). Să se illustreze grafic dreptele  $a_1, a_2, a_3, a_4$  știind ca sunt satisfăcute simultan relațiile :  
 a).  $a_1 \cap a_2 = \{A\}$       b).  $a_1 \cap a_4 = \{D\}$       c).  $a_2 \cap a_3 = \{B\}$   
 d).  $a_3 \cap a_4 = \{B\}$       e).  $C \in a_3$       f).  $A, C, D$  puncte coliniare
- 10). Să se deseneze figura geometrică pentru care sunt satisfăcute simultan relațiile:  
 i).  $A, C \in d$ ; b).  $A, B, D$  puncte coliniare distincte două câte două, în această ordine;  
 c).  $D, C, E$  puncte coliniare, în această ordine; d).  $B \notin d$ ;  
 i). Cum sunt dreptele  $d$  și  $BD$  dacă  $B \in d$  ?  
 ii). Să se scrie toate dreptele concurente cu  $BE$  și punctele lor de intersecție.

### Semidrepte și segmente



#### NOTIUNI DE BAZĂ

se numește semidreaptă o porțiune dintr-o dreaptă mărginită într-o parte și prelungită la nesfârșit în cealaltă parte. Marginea se numește originea semidreptei și se notează :  $[OA$  semidreapta închisă adică  $O \in [OA$ ,  $O$  originea semidreptei,  $A$

un punct oarecare de pe semidreaptă și (OA semidreaptă deschisă adică  $O \notin (OA)$ .

- (OA și (OB se numesc semidrepte opuse dacă A, O, B sunt puncte coliniare în această ordine
- se numește segment o porțiune dintr-o dreaptă, mărginită în ambele părți. Deci un segment are două capete.
- se notează :  $[AB]$  = segment închis ,  $A, B \in [AB]$  și  $(AB)$  = segment deschis ,  $A, B \in (AB)$ .
- segmentul  $(AA) = \emptyset$  este segmentul nul.
- $[AA] = \{A\}$ .

## PROBLEME

\*

1). Ținând cont de figura 2, să se afle valoarea de adevăr a propozițiilor :

- |                              |                         |
|------------------------------|-------------------------|
| a). $B \in a$                | b). $D \in a$           |
| c). $C \in b$                | d). $D \notin d$        |
| e). $B \notin [AB]$          | f). $C \in [AC]$        |
| g). $[AC] \subset a$         | h). $BD \cap a = \{B\}$ |
| i). $A \notin b$             | j). $a \cap b = \{C\}$  |
| k). A, B, C puncte coliniare |                         |

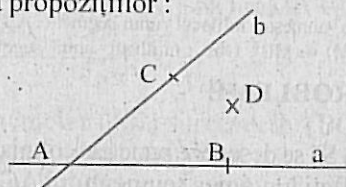


Fig. 2

2). Priviți figura 3 și precizați valoarea de adevăr a propozițiilor:

- |                     |                     |
|---------------------|---------------------|
| a). $A \in [BC]$    | b). $G \in [AE]$    |
| c). $D \in [EC]$    | d). $C \in [DE]$    |
| e). $B \in (AC)$    | f). $E \in AF$      |
| g). $G \notin [ED]$ | h). $F \in (AE)$    |
| i). $E \in [FA]$    | j). $C \notin [AE]$ |
| k). $C \in [BA]$    | l). $E \in DC$      |

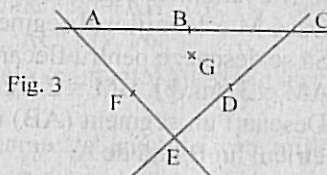


Fig. 3

\*\*

3). Fie punctele A, C, B, D, E coliniare, în această ordine. Să se afle valoarea de adevăr a propozițiilor :

- |                             |                             |                             |
|-----------------------------|-----------------------------|-----------------------------|
| a). $[AC] = [AE] = [AD]$    | b). $(BC) = [CB]$           | c). $A \in (DE)$            |
| d). $B \notin (BA)$         | e). $[AC] = [ED]$           | f). $[BC] \subset [BA]$     |
| g). $(DE) \subset (AC)$     | h). $[CD] \subset (CE)$     | i). $(CB) \cap (BC) = (CB)$ |
| j). $[AC] \cap [DB] = (BC)$ | k). $[AB] \cap [EA] = [AE]$ |                             |

4). Desenați semidreptele (BA), (BC), (BD) știind că (BA) și (BC) sunt opuse. Cercetați dacă : a).  $B \in [CD]$ ; b).  $B \in [AC]$ ; c).  $A \in (CB)$ ; d).  $C \in (BA)$ ; e).  $D \in [AC]$ ; f).  $C \in (AB)$ . Cum vor fi punctele A, B și D dacă  $C \in (BD)$  ?

5). Desenați semidreptele (BA), (BD) și (BC) astfel încât  $D \in [AC]$ . Cercetați dacă: a).  $C \in (AD)$ ; b).  $C \in [AD]$ ; c).  $D \in (AC)$ ; d).  $B \in (DC)$ ; e).  $A \in [CD]$ ; f). A, D, C puncte coliniare.

Pentru exercițiile de mai jos, desenați toate cazurile posibile care îndeplinesc condițiile date și menționați ordinea punctelor :

- $[AB] \subset (DC)$ ; A, B, C, D puncte coliniare
- $(AB) \subset (CD)$  și  $B \in [AD]$ ; A, B, C, D puncte coliniare
- $[BC] \subset [AC]$ ; A, B, C puncte coliniare
- $(BC) \cap (BA) = \emptyset$ ; A, B, C puncte coliniare
- $A \in (CB)$ ; A, B, C puncte coliniare
- $[AC] \subset [BC]$ ; A, B, C puncte coliniare
- $[AC] \cap [BD] = [BC]$ ; A, B, C, D puncte coliniare
- $[AC] \cap [BD] = [BD]$ ;  $D \in [AC]$ ; A, B, C, D puncte coliniare
- $(CA) \cap [BD] = \emptyset$ ; A, B, C, D puncte coliniare
- $[CD] \subset (AB)$ ,  $D \notin [CB]$ ;  $C \in [AB]$ ; A, B, C, D puncte coliniare
- $[CD] \subset (AB)$ ,  $C \in [BD]$ ; A, B, C, D puncte coliniare



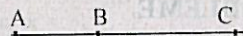
# Lungimea unui segment. Operații cu segmente.

## Mijlocul unui segment



### NOȚIUNI DE BAZĂ

- numim distanța dintre două puncte A și B, lungimea segmentului AB.
- se numesc segmente congruente două segmente care au aceeași lungime
- în figura alăturată definim :  $AC$  segmentul sumă  $AC = AB + BC$   
 $AB$  segmentul diferență  $AB = AC - BC$
- se numește mijlocul unui segment AB, punctul  $M \in [AB]$ , care împarte segmentul în două segmente congruente  $(AM) = (MB)$ . Obs. : mijlocul unui segment este unic.



### PROBLEME

\*

1. Să se deseneze punctele coliniare A, B, C în această ordine, astfel încât  $AB = 6$  cm,  $BC = 2$  cm. Aflați lungimea segmentului AC.
2. Să se deseneze punctele coliniare A, B, C în această ordine, astfel încât  $AB = 7,2$  cm și  $AC = 9,1$  cm. Să se afle lungimea segmentului BC.
3. Dacă M este mijlocul segmentului (AB) și  $AM = 3,25$  cm, să se afle MB și AB.
4. Să se deseneze pentru fiecare caz segmentul (AB), dacă M este mijlocul lui și avem :  
 a).  $AM = 3$  cm; b).  $BM = 2,5$  cm.
5. Desenați un segment (AB) de lungime 5 cm și construiți simetricul lui A față de B și simetricul lui B față de A.
6. Desenați un segment (AB) de lungime 8 cm și  $C \in (AB)$  cu  $AC = 3$  cm. Construiți simetricile lui C față de A și B.
7. Desenați un segment (AB) și C mijlocul lui. Ce este punctul B pentru punctul A ? Dar punctul A pentru punctul B ?

\*\*

8. Să se deseneze punctele coliniare M, N, P astfel încât  $MN = 7$  cm,  $MP = 5$  cm,  $NP = 2$  cm. În ce ordine sunt așezate punctele ?
9. Să se deseneze punctele coliniare S, R, T astfel încât  $SR = 2$  cm și  $ST = 5$  cm. Aflați lungimea segmentului RT. Câte soluții are problema ?
10. Să se deseneze punctele coliniare A, B, C, D în această ordine astfel încât  $AB = 2$  cm,  $AC = 7$  cm;  $AD = 10$  cm. Să se afle lungimile segmentelor BC, CD, BD.
11. Să se deseneze punctele coliniare E, F, G, H în această ordine, astfel încât  $EH = 12$  cm,  $EG = 10$  cm,  $FH = 5$  cm. Să se afle lungimile segmentelor GH, FG, EF.
12. A, P, R, B, E sunt puncte coliniare în această ordine, astfel încât  $AP = 2$  cm,  $AR = 7$  cm,  $PB = 8$  cm,  $PE = 12$  cm. Să se afle lungimile segmentelor PR, RB, BE, RE, AB, AE.
13. În figura 4 se cunosc :  $AE = 22$  cm,  $AB = 9$  cm,  $BD = 4$  cm,  $AC = BD$ ,  $DF = 5$  cm. Să se afle lungimile segmentelor DE, FE, AC, CB. Găsiți toate perechile de segmente congruente.

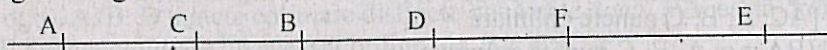


Fig. 4

14. În figura 5 se cunosc :  $AF = 15$  cm;  $AB = CE$ ;  $ED = DF$  și  $BC = CD$ ;  $AB = 2$  cm.  
 a). Să se afle lungimile segmentelor BC; CE; ED; DF.  
 b). Ce reprezintă D pentru segmentul [EF] ?

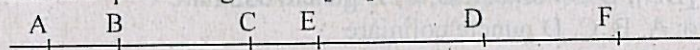


Fig. 5

15. În figura 6 se cunosc :  $[AB] = [BC]$ ,  $[CE] = [EF]$ ,  $AF = 18$  cm și lungimea segmentului EC este cu 1 cm mai mare decât cea a segmentului BC. a). Să se afle AB și CE; b). Ce



reprezintă punctele B și E pentru segmentele AC și respectiv CF ?

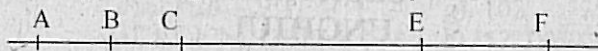


Fig. 6

16). Verificați relațiile de mai jos privind figura 7. Corectați greselile apărute.

- |                    |                    |                           |
|--------------------|--------------------|---------------------------|
| a). $MN = MP + NP$ | b). $MP = MQ - PQ$ | c). $NP = PQ + MN$        |
| d). $MQ = MP + NQ$ | e). $NQ = MQ - MN$ | f). $MN = MQ - (PQ + PN)$ |
| g). $PM = MN + PQ$ | h). $PQ = NQ - NP$ | i). $MN + NQ = MP + PQ$   |



Fig. 7

17). Fie A, B, C puncte coliniare și M, N mijloacele segmentelor (AB) și respectiv (BC). Dacă  $AM = 3$  cm,  $NC = 3,5$  cm, să se afle lungimile segmentelor AB, BC și AC.

18). Fie R, S, T puncte coliniare și M, N mijloacele segmentelor (RS) și (ST). Dacă  $RS = 4$  cm,  $RT = 12$  cm, să se afle lungimile segmentelor ST, RM, NT, MN.

19). Desenați A, B, C puncte coliniare, M, N, P mijloacele segmentelor (AB), (BC) și respectiv (AC), cunoscând  $AM = 5$  cm,  $MC = 11$  cm. Aflați AB, BC, AC, MP, PN.

20). Aflați MN dacă cunoaștem  $AC = 14$  cm, M, N mijloacele segmentelor (AB), respectiv (BC), unde A, B, C puncte coliniare.

21). În figura 8 :  $AB = 5$  cm,  $BC = 4$  cm,  $AD = 13$  cm. Să se arate ca punctul C este mijlocul segmentului (BD).

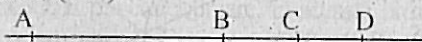


Fig. 8



Fig. 9

22). În figura 9 :  $AE = 12$  cm,  $AF = 10$  cm,  $CF = 7$  cm,  $(AC) \equiv (CB)$ . Să se afle EF, BF, AC și să se arate ca punctul B este mijlocul segmentului (AE).

23). Să se deseneze punctele coliniare A, B, D, C în această ordine, astfel încât  $AB = 3$  cm,  $BC = 7$  cm,  $BD = 2$  cm. a). Să se afle AD, DC, AC. b). Ce reprezintă punctul D pentru segmentul (AC) ? c). Fie M, N mijloacele segmentelor (BD) respectiv (DC). Să se afle BM, AM, CN, BN, NM, AN.

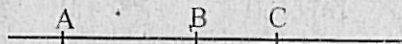
24). Fie A, B, C, D puncte coliniare, în această ordine și M mijlocul segmentului (AB), C mijlocul segmentului (BD), astfel încât  $AM = 2$  cm,  $BD = 8$  cm. Să se afle : a). AB, MC, MD, AD; b). distanța de la mijlocul segmentului (AC) la mijlocul segmentului (CD).

25). Fie A, B, C, D puncte coliniare în această ordine, astfel încât  $AB = 4$  cm,  $AC = 9$  cm,  $AD = 16$  cm. a). Să se figureze mijloacele segmentelor (AB), (BC), (CD), (BD), (AC); b). Să se afle distanța dintre mijloacele segmentelor (AB) și (BD).

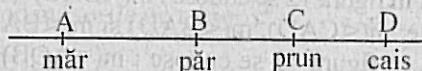
26). Fie A, B, C, D puncte coliniare și  $AB = 6$  cm,  $(AB) \equiv (BC)$  și C este mijlocul segmentului (BD). Să se afle AD.

27). Fie punctele A, B, C coliniare și M mijlocul segmentului (AB), iar B mijlocul segmentului (AC). Dacă  $AM = 3$  cm, să se afle : a). MC și AC; b). Dacă N este mijlocul segmentului (BC), să se afle la ce distanță de M se afle mijlocul segmentului (BN).

28). A, B și C sunt trei localități situate pe un drum național astfel încât  $d(A; B) = 2 \cdot d(B; C)$  și  $d(A; C) = 120$  km. Aflați  $d(A; B)$ .



29). A, B, C și D sunt patru pomi plantați în linie dreaptă. Prunul se află la mijloc, între păr și cais, iar  $d(A; B) : d(C; D) = 2$  rest 3 m și  $d(A; C) = 15$  m. Aflați distanța de la măr la cais.



# Capitolul IX

## UNGHII



### NOTIUNI DE BAZĂ

- se numește unghi figura geometrică formată din două semidrepte care au aceeași origine.
- cele două semidrepte se numesc laturi și originea comună este vârful unghiului
- a măsura un unghi înseamnă a măsura „deschiderea” dintre semidreptele care formează unghiul
- unitatea de măsură este gradul cu submultipli : minutul, secunda  $1^\circ = 60'$  și  $1' = 60''$
- unghiul nul este format din două semidrepte identice, el are măsura de  $0^\circ$
- unghiul alungit este unghiul format de două semidrepte opuse, el are măsura de  $180^\circ$
- se numesc unghiuri congruente unghiurile care au aceeași măsură
- se numesc unghiuri adiacente două unghiuri care au o latură comună, vârful comun și celelalte laturi de o parte și de alta a laturii comune
- se numesc unghiuri complementare două unghiuri care au suma de  $90^\circ$
- se numesc unghiuri suplementare două unghiuri care au suma de  $180^\circ$

### EXERCITII ȘI PROBLEME

\*\*\*

1). Enumerați unghiurile diferite de pe desen și găsiți valoarea logică a următoarelor propoziții:

- semidreapta (OE este exterioră ( $\angle AOB$ )
- semidreapta (OD este interioră ( $\angle EOC$ )
- semidreapta (OC este interioră ( $\angle DOE$ )
- $D \in \text{int}(\angle EOC)$
- $\text{int}(\angle EOA) \subset \text{int}(\angle DOB)$
- $\text{int}(\angle COB) \subset \text{int}(\angle DOB)$
- $\text{int}(\angle DOC) \subset \text{ext}(\angle DOA)$
- $\text{int}(\angle EOA) \cup \text{int}(\angle DOE) = \text{int}(\angle DOA) - (OE)$
- $\text{int}(\angle EOC) - \text{int}(\angle DOC) = \text{int}(\angle DOE) \cup (OD)$
- $\text{int}(\angle AOB) \cap \text{int}(\angle EOB) = \text{int}(\angle AOB)$
- $\text{int}(\angle EOC) \cap \text{int}(\angle DOA) = \text{int}(\angle DOE)$
- $\text{ext}(\angle AOB) \cap \text{ext}(\angle AOC) = \text{int}(\angle COB)$
- $\text{ext}(\angle AOD) \cap \text{int}(\angle EOB) = \text{int}(\angle AOB)$

2). În câte moduri se pot denumi unghiurile din figura 11 ?

- Aflați :
- $\text{int}(\angle BAC) \cup \text{int}(\angle CAE)$
  - $\text{int}(\angle EAG) - \text{int}(\angle FAG)$
  - $\text{ext}(\angle BAF) \cap \text{int}(\angle FAD)$
  - $\text{ext}(\angle GAE) \cap \text{int}(\angle FAD)$

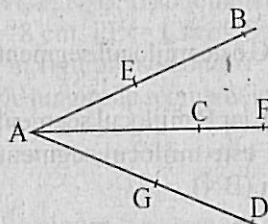


Fig. 11

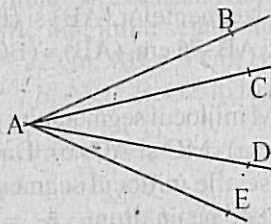


Fig. 12

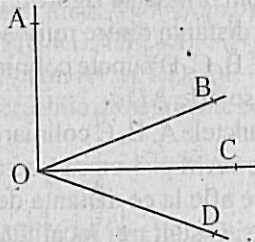


Fig. 13

- În figura 12 se cunosc :  $m(\angle BAC) = 18^\circ 30'$ ;  $m(\angle CAE) = 45^\circ 30'$ ;  $m(\angle DAE) = 17^\circ 45'$ . Să se afle:  $m(\angle CAD)$ ,  $m(\angle BAD)$  și  $m(\angle BAE)$ .
- În figura 13 se cunosc :  $m(\angle AOB) = 55^\circ$ ;  $m(\angle BOD) = 90^\circ$ ;  $\angle BOD \equiv \angle AOC$ . Să se afle :  $m(\angle COD)$  și  $m(\angle AOD)$ .



5). Să se calculeze :

- a).  $43^{\circ} - 27^{\circ}30' =$  d).  $17^{\circ}20' - 9^{\circ}11' =$  g).  $102^{\circ} - 53^{\circ}43'38'' =$   
 b).  $108^{\circ} - 59^{\circ}45' =$  e).  $83^{\circ}17' - 17^{\circ}45' =$  h).  $17^{\circ}38'59'' + 45^{\circ}56'18'' =$   
 c).  $32^{\circ}17' - 29^{\circ} =$  f).  $100^{\circ}30' - 99^{\circ}45'30'' =$  i).  $20^{\circ} - 3^{\circ}17'5'' + 14^{\circ}38'56'' =$   
 j).  $14^{\circ}23' + 15^{\circ}41'56'' - 25^{\circ}45'58'' =$

6). Calculați :

- a).  $12^{\circ}13' \cdot 3 =$  b).  $15^{\circ}28'30'' \cdot 4 =$  c).  $25^{\circ}12'43'' : 2 =$   
 d).  $58'130'' \cdot 4 =$  e).  $3^{\circ}58'' \cdot 16 =$  f).  $125^{\circ} : 2 =$   
 g).  $18^{\circ}33' : 4 =$  h).  $15^{\circ}49'18'' : 2 =$  i).  $24^{\circ}38'10'' : 5 =$   
 j).  $17^{\circ}32' \cdot 3 : 2 =$

7). Să se transforme în grade, minute, secunde :

- a).  $15624''$  ; b).  $104328''$  ; c).  $6245''$  ; d).  $1325''$  ; e).  $1945'260''$  ; f).  $8725'343''$

8). i). Să se ilustreze grafic unghiurile :

- a).  $m(\angle POR) = 28^{\circ}$  b).  $m(\angle LOM) = 77^{\circ}$  c).  $m(\angle SOP) = 114^{\circ}$   
 d).  $m(\angle DOE) = 76^{\circ}60'$  e).  $m(\angle JOP) = 27^{\circ}59'60''$  f).  $m(\angle TOS) = 113^{\circ}58'120''$

ii). Care din unghiurile de mai sus sunt congruente ?

9). Construiți următoarele unghiuri și precizați care sunt congruente :

- a).  $m(\angle BAC) = 30^{\circ}$   $m(\angle CAD) = 44^{\circ}60'$  (AC  $\in$  int ( $\angle BAD$ ))  
 b).  $m(\angle MON) = 29^{\circ}59'60''$   $m(\angle NOP) = 43^{\circ}119'60''$  (ON  $\in$  int ( $\angle MOP$ ))  
 c).  $m(\angle GEF) = 29^{\circ}60'$   $m(\angle KEG) = 45^{\circ}$  (EG  $\notin$  ext ( $\angle FEK$ ))

Aflați  $m(\angle BAD)$ ;  $m(\angle MOP)$ ;  $m(\angle FEK)$ .

10). Fie A, O, E puncte coliniare, în această ordine. Semidreptele (OB și (OC împart  $\angle AOE$  în trei unghiuri congruente și (OD  $\in$  int ( $\angle COE$ )) astfel încât  $m(\angle DOE) = 20^{\circ}$ . Să se afle  $m(\angle COD)$  și  $m(\angle BOD)$ .

## Unghiuri adiacente, complementare, suplementare

\*

- 1). Să se deseneze unghiurile  $\angle BAC$  și  $\angle CAD$  adiacente astfel încât  $m(\angle BAC) = 45^{\circ}$  și  $m(\angle CAD) = 27^{\circ}$ . Să se afle  $m(\angle BAD)$ .
- 2). Să se deseneze unghiurile  $\angle BAC$  și  $\angle CAD$  adiacente astfel încât  $m(\angle BAC) = 38^{\circ}$  și  $m(\angle BAD) = 70^{\circ}$ . Să se afle  $m(\angle CAD)$ .
- 3). Să se deseneze unghiul  $\angle ABC$ ,  $m(\angle ABC) = 60^{\circ}$  și (BD interioară unghiului astfel încât  $m(\angle CBD) = 25^{\circ}$ . Să se afle  $m(\angle ABD)$ .
- 4). Să se deseneze unghiul  $\angle ABC$ ,  $m(\angle ABC) = 81^{\circ}$  și (BD exterioră unghiului astfel încât  $m(\angle DBC) = 30^{\circ}$ . Să se afle  $m(\angle ABD)$ .

\*\*

- 5). Să se deseneze unghiul  $\angle ABC$ ,  $m(\angle ABC) = 25^{\circ}$  și (BD exterioră unghiului astfel încât  $m(\angle ABD) = 45^{\circ}$ . Să se afle  $m(\angle DBC)$ ; câte soluții sunt ?
- 6). Calculați complementele și suplementele pentru unghiurile cu măsurile :  
 a).  $32^{\circ}$  b).  $51^{\circ}$  c).  $87^{\circ}$  d).  $15^{\circ}45'$  e).  $17^{\circ}38'$  f).  $83^{\circ}59'$   
 g).  $48^{\circ}15'15''$  h).  $73^{\circ}48'72''$  i).  $7^{\circ}8'13'$  j).  $34^{\circ}15''$  k).  $58''$  l).  $1376''$
- 7). Precizați perechile de unghiuri complementare având măsurile de mai jos :  
 a).  $(35^{\circ}; 55^{\circ})$  b).  $(12^{\circ}13'; 77^{\circ}47')$   
 c).  $(13^{\circ}15'14''; 77^{\circ}44'46'')$  d).  $(28^{\circ}19'; 47^{\circ}51')$
- 8). Precizați perechile de unghiuri suplementare având măsurile de mai jos :  
 a).  $(108^{\circ}; 71^{\circ})$  b).  $(95^{\circ}17'; 84^{\circ}43')$   
 c).  $(102^{\circ}13'56''; 17^{\circ}18'24'')$  d).  $(170^{\circ}17'8''; 576'412'')$

9). Cercetați dacă următoarele perechi de unghiuri sunt complementare sau suplementare :

- $m(\angle MNP) = 117^\circ$  și  $m(\angle STQ) = 62^\circ 60'$
- $m(\angle DGH) = 89^\circ 120'$  și  $m(\angle LKJ) = 89^\circ$
- $m(\angle PQR) = 37^\circ 59' 60''$  și  $m(\angle ABC) = 53^\circ$
- $m(\angle DEF) = 348^\circ 79'$  și  $m(\angle MNL) = 84^\circ 10' 41''$

10). Fie semidreptele (OA, (OB și (OC astfel încât  $(OC \in \text{int}(\angle AOB))$ . Precizați dacă punctele A, O, B sunt coliniare, pentru fiecare caz :

- $m(\angle AOC) = 90^\circ$  și  $m(\angle COB) = 89^\circ 60'$
- $m(\angle AOC) = 37^\circ 40' 15''$  și  $m(\angle BOC) = 152^\circ 19' 45''$
- $m(\angle AOC) = 108^\circ 14' 83''$  și  $m(\angle BOC) = 72^\circ 44' 47''$
- $m(\angle BOC) = 340^\circ 500''$  și  $m(\angle AOC) = 174^\circ 11' 40''$

- Să se deseneze unghiurile adiacente complementare  $\angle ABD$  și  $\angle DBC$ , astfel încât  $m(\angle ABD) = 11^\circ$ .
- Să se deseneze unghiurile adiacente suplementare  $\angle ABC$  și  $\angle CBD$ , astfel încât  $m(\angle CBD) = 115^\circ$ .
- Să se afle măsura unghiului al cărui suplement este de 4 ori mai mare decât el.
- Să se afle măsura unghiului al cărui complement este de 2 ori mai mic decât el.

\*\*\*

- Să se deseneze unghiurile neadiacente complementare  $\angle ABC$  și  $\angle ABD$  astfel încât  $m(\angle ABC) = 25^\circ$ .
- Să se deseneze unghiurile neadiacente suplementare  $\angle ABC$  și  $\angle CBD$  astfel încât  $m(\angle ABC) = 120^\circ$ .
- Să se deseneze unghiurile neadiacente complementare  $\angle ABC$  și  $\angle ABE$  astfel încât  $m(\angle CBE) = 10^\circ$ .
- Să se deseneze unghiurile neadiacente suplementare  $\angle ABC$  și  $\angle ABD$  astfel încât  $m(\angle CBD) = 2 \cdot m(\angle ABC)$ .

## Bisectoarea unui unghi Unghi drept, ascuțit, obtuz. Unghiuri opuse la vârf



### NOȚIUNI DE BAZĂ

- se numește bisectoarea unui unghi semidreapta cu originea în vârful unghiului, situată în interiorul unghiului și care formează, cu laturile unghiului inițial unghiuri congruente
- se numește unghi drept orice unghi congruent cu suplementul său
- se numește unghi ascuțit orice unghi cu măsura mai mică de  $90^\circ$
- se numește unghi obtuz orice unghi cu măsura cuprinsă între  $90^\circ$  și  $180^\circ$
- suma măsurilor unghiurilor formate în jurul unui punct este  $360^\circ$
- se numesc unghiuri opuse la vârf două unghiuri cu același vârf și laturile unuia sunt în prelungirea laturilor celuilalt.
- dacă două unghiuri sunt opuse la vârf atunci ele sunt congruente

### EXERCIIȚII ȘI PROBLEME

\*

- Să se deseneze unghiurile  $\angle ABC$  și  $\angle CBD$  adiacente astfel încât  $m(\angle ABC) = 44^\circ$  și  $\angle CBD$  este unghi drept. Să se afle  $m(\angle ABD)$ .

\*\*

- Să se deseneze unghiurile  $\angle ABC$  și  $\angle CBD$  neadiacente astfel încât  $m(\angle ABC) = 25^\circ$  și  $\angle CBD$  este unghi drept. Să se afle  $m(\angle ABD)$ .
- Să se deseneze unghiurile  $\angle ABC$  și  $\angle CBD$  adiacente,  $\angle ABC$  este unghi drept,  $m(\angle CBD) = 50^\circ$ . (BE este bisectoarea unghiului  $\angle ABC$ . Să se afle  $m(\angle ABD)$  și  $m(\angle EBD)$ .
- Să se deseneze unghiurile  $\angle ABC$  și  $\angle CBD$  adiacente,  $\angle ABC$  este unghi drept și  $4\angle ABD = 112^\circ$ . (BE este bisectoarea unghiului  $\angle CBD$ . Să se afle  $m(\angle DBC)$ ;  $m(\angle DBE)$  și  $m(\angle ABE)$ .
- Fie  $\angle ABC$  unghi drept și (BD interioară unghiului astfel încât  $m(\angle ABD) = 66^\circ$ . (BE este

bisectoarea unghiului  $\angle DBC$ . Să se afle  $m(\angle DBC)$  și  $m(\angle ABE)$ .

6). Fie  $\angle AOC$  și  $\angle COD$  adiacente suplementare iar  $O \in (BE)$  astfel încât  $(OB)$  este bisectoarea unghiului  $\angle AOC$ ,  $m(\angle COD) = 60^\circ$ . Să se afle: a).  $m(\angle AOE)$ ; b).  $m(\angle EOD)$ ; c). măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor  $\angle COD$  și  $\angle AOE$ .

7). Să se afle măsura unui unghi știind că este cu  $40^\circ$  mai mare decât complementul său.

8). Să se afle măsura unui unghi știind că este cu  $26^\circ$  mai mic decât suplementul său.

9). Fie  $\angle AOB$  și  $\angle COD$  unghiuri opuse la vârf.  $AC \cap BD = \{O\}$ . Dacă  $m(\angle AOB) = 27^\circ$ , să se afle  $m(\angle COD)$ ;  $m(\angle AOD)$  și  $m(\angle BOC)$ .

10). În fiecare din figurile următoare, punctele A, O, B sunt coliniare și semidreptele punctate sunt bisectoare. Aflați unghiurile necunoscute.

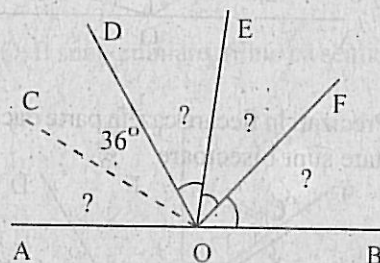
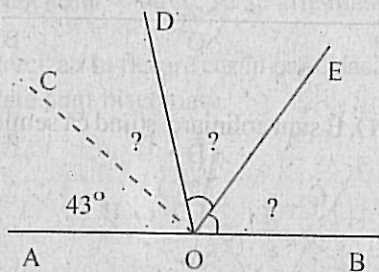
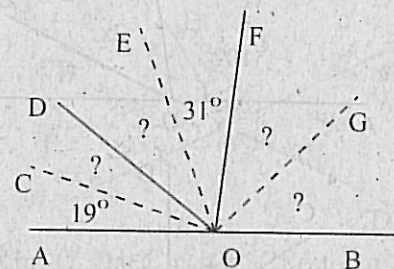
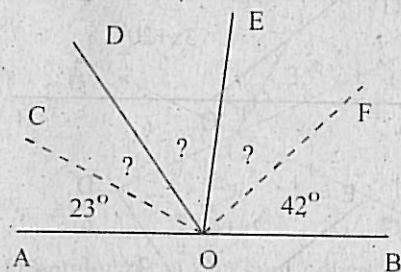
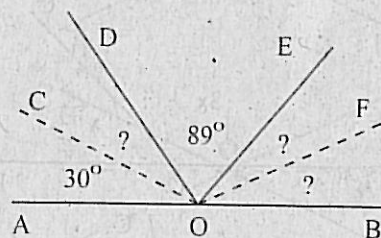
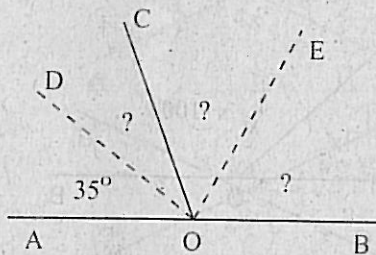
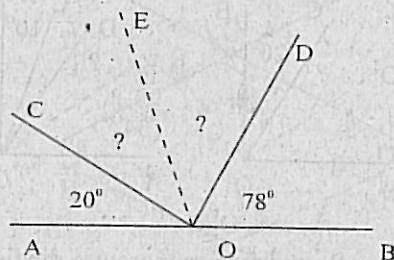
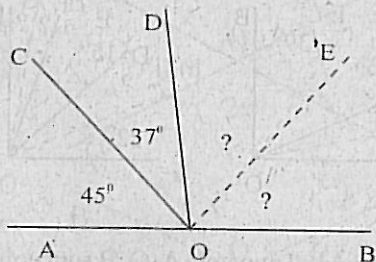


Fig. 14



11). În fiecare din figurile următoare,  $m(\angle AOB) = 90^\circ$  și semidreptele punctate sunt bisectoare. Aflați unghiurile necunoscute.

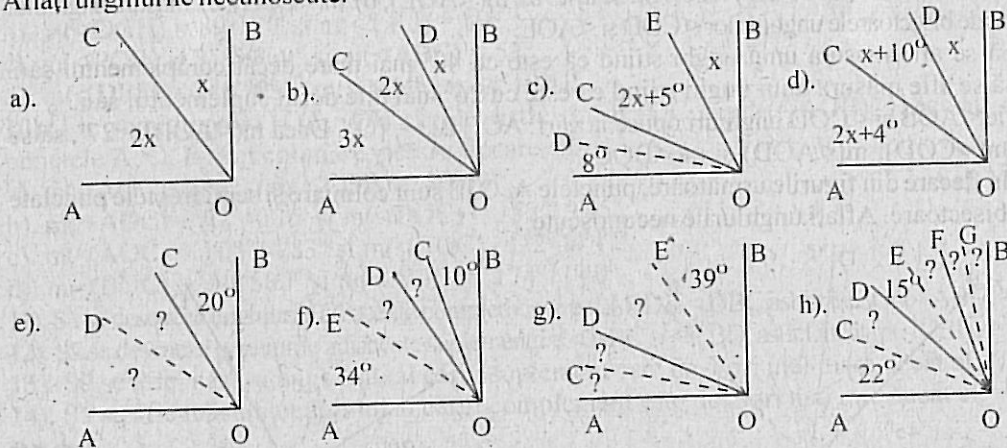


Fig. 15

12). Să se afle unghiul necunoscut  $x$ , din fiecare figură, știind că punctele A, O, B sunt coliniare.

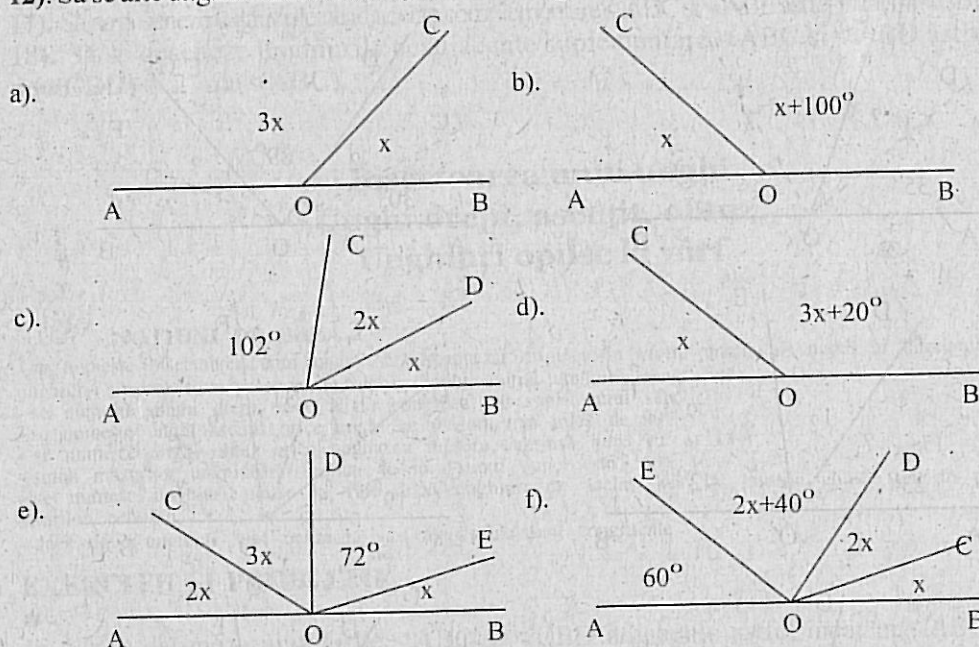
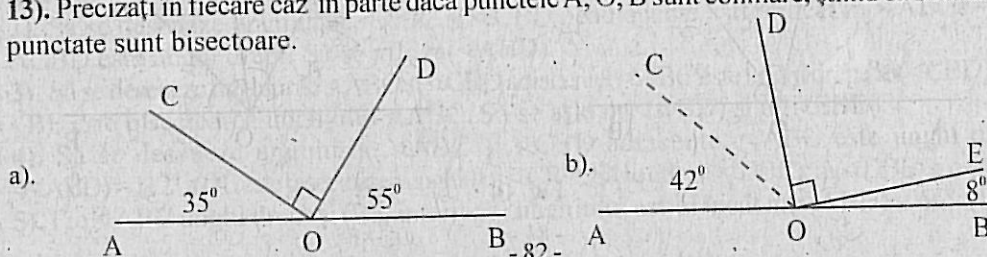
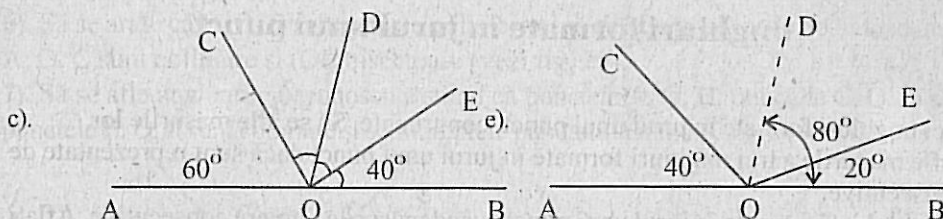


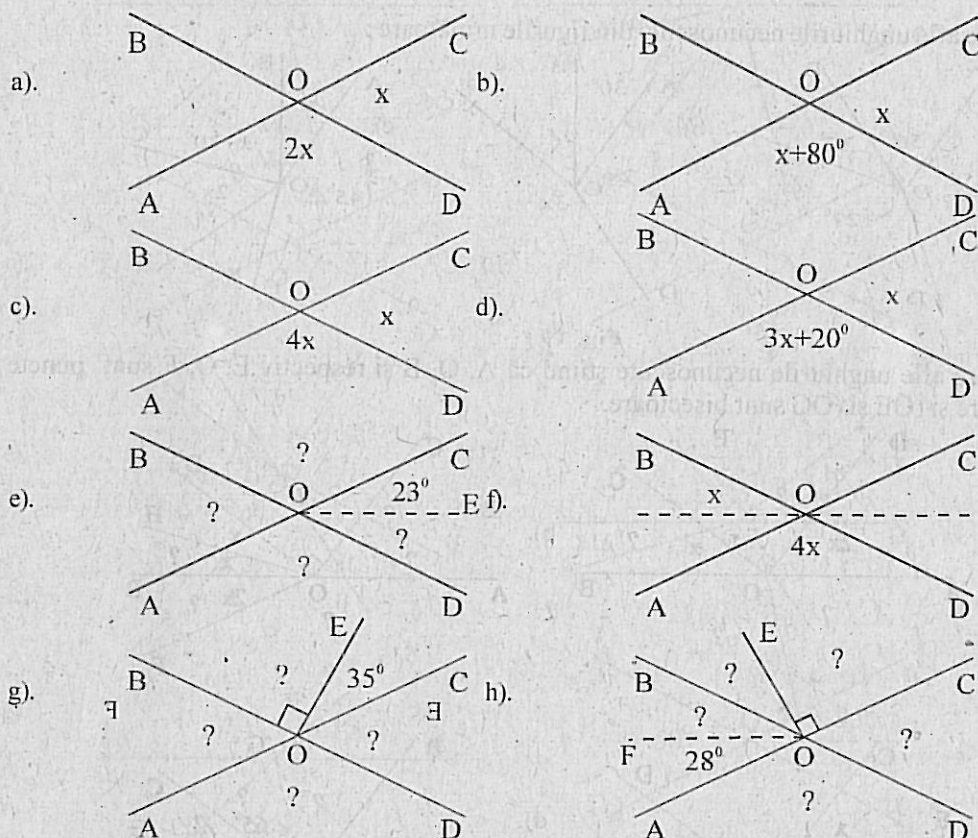
Fig. 16

13). Precizați în fiecare caz în parte dacă punctele A, O, B sunt coliniare, știind că semidreptele punctate sunt bisectoare.





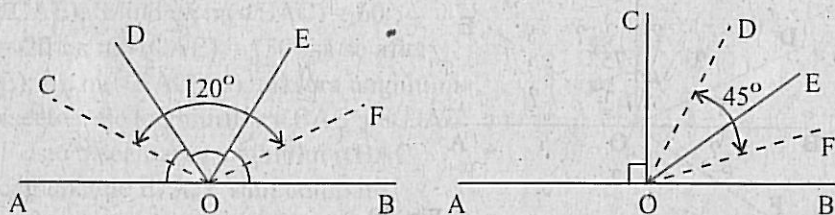
14). Să se afle unghiurile necunoscute știind că A, O, C și respectiv B, O, D sunt puncte coliniare.



15). Dreptele AB și CD sunt concurente în punctul O. Dacă  $m(\angle BOC)$  este cu  $70^\circ$  mai mare decât  $m(\angle AOC)$ , să se afle măsurile unghiurilor care s-au format.

\*\*\*

16). Precizați în fiecare caz în parte dacă punctele A, O, B sunt coliniare, știind că semidreptele punctate sunt bisectoare.



## Unghiuri formate în jurul unui punct

\*

- 1). Fie cinci unghiuri formate în jurul unui punct, congruente. Să se afle măsurile lor.
- 2). Să se afle măsurile a trei unghiuri formate în jurul unui punct dacă sunt reprezentate de numere consecutive.
- 3). Fie cinci unghiuri formate în jurul unui punct având măsurile numere consecutive. Aflați măsurile lor.

\*\*

- 4). Să se afle unghiurile necunoscute din figurile următoare :

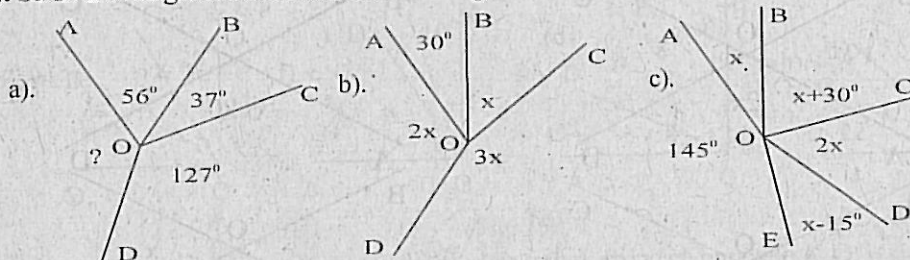


Fig. 19

- 5). Să se afle unghiurile necunoscute știind că A, O, B și respectiv E, O, F sunt puncte coliniare și (OE și OG sunt bisectoare.

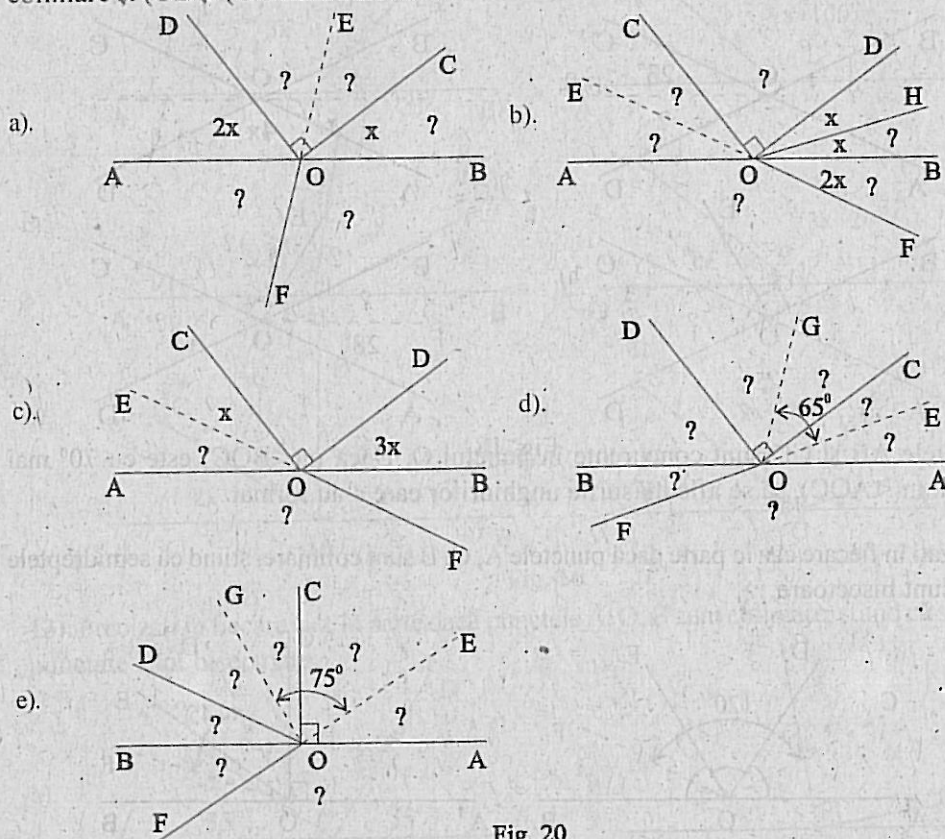


Fig. 20  
- 84 -



6). Să se arate că B, O, D sunt puncte coliniare și să se afle unghiurile necunoscute, știind că A, O, C sunt coliniare și (OE bisectoare (vezi fig. 21).

7). Să se afle unghiurile necunoscute știind că punctele A, O, B; punctele C, O, D și respectiv punctele E, O, F sunt coliniare și semidreptele punctate sunt bisectoare (vezi fig. 22).

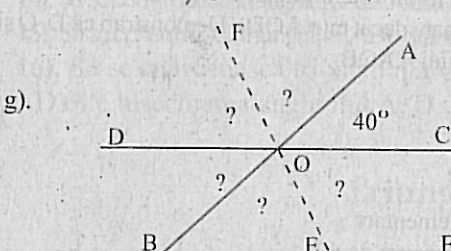
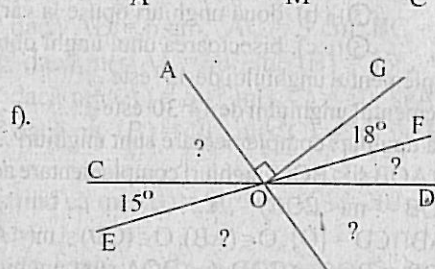
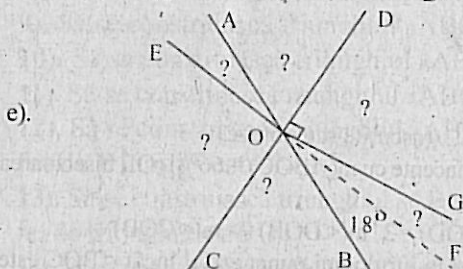
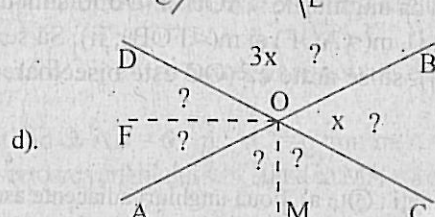
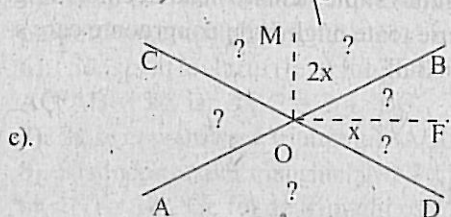
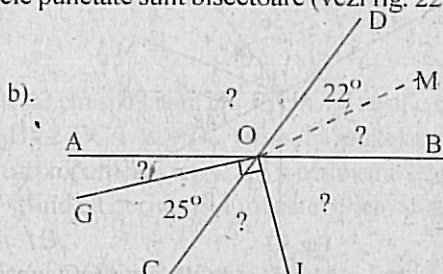
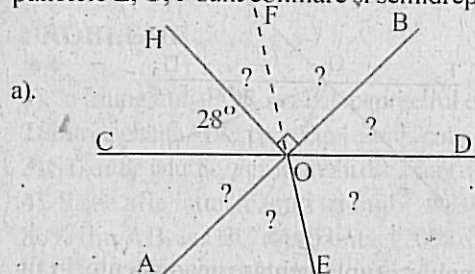


Fig. 22

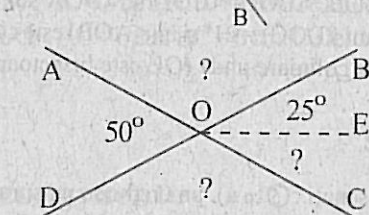


Fig. 21

8). a). Știind că (OE și (OF sunt bisectoare, să se afle unghiul necunoscut în fig. 24.

9). Fie  $\angle BAC$ ,  $\angle CAD$ ,  $\angle DAE$  și  $\angle EAB$  unghiuri formate în jurul unui punct astfel încât ( $AD \in \text{int}(\angle CAE)$ ). Știind că  $m(\angle BAC) = 60^\circ$ ,  $m(\angle CAD) = 20^\circ$  și  $m(\angle CAE) = 150^\circ$  să se afle:  
a).  $m(\angle BAE)$ ; b).  $m(\angle BAD)$ ; c). măsura unghiului format de bisectoarele unghiurilor  $\angle BAC$  și  $\angle DAE$ ;  
d). dacă (AF este bisectoarea unghiului  $\angle BAC$ , să se arate că punctele E, A, F sunt coliniare.

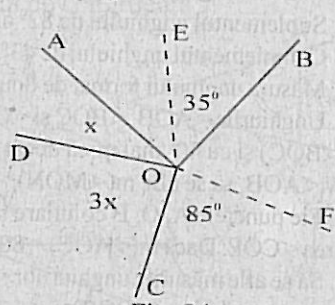


Fig. 24

\*\*\*

10). Știind că semidreptele punctate din fig. 23 sunt bisectoare, să se afle  $m(\angle MOS)$ ;  $m(\angle GOS)$ .

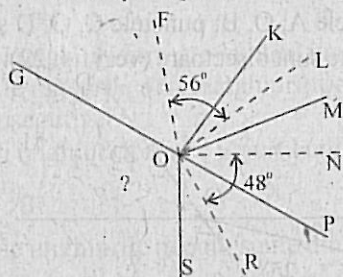


Fig. 23

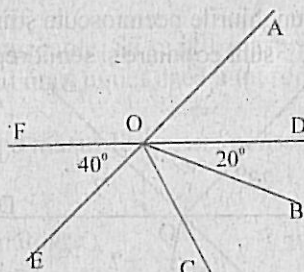


Fig. 25

11). b). Știind că unghiurile  $\angle AOB$  și  $\angle AOC$  sunt unghiuri suplementare neadiacente, în fig. 25 să se afle: i).  $m(\angle AOF)$  și  $m(\angle FOB)$ ; ii). Să se scrie toate unghiurile congruente care s-au format; iii). să se arate că (OC este bisectoarea  $\angle BOE$ ).

## Testul 1

- 1). Desenați : ⑤1p a). două unghiuri adiacente ascuțite.  
 ⑤1p b). două unghiuri opuse la vârf.  
 ⑤1p c). bisectoarea unui unghi obtuz.
- ⑤1p 2). Complementul unghiului de  $43^\circ$  este .....
- ⑦1p 3). Suplementul unghiului de  $14^\circ 30'$  este .....
- ⑦1p 4). Două unghiuri complementare sunt unghiuri ..... (ascuțite sau obtuze)
- ⑨1p 5). Fie  $\angle AOB$  și  $\angle BOC$  unghiuri complementare adiacente cu  $m(\angle BOC) = 66^\circ$  și (OE bisectoarea unghiului  $\angle AOB \Rightarrow m(\angle EOC) = \dots\dots$
- ⑨1p 6). Fie  $AB \cap CD = \{O\}$ ,  $O \in (AB)$ ,  $O \in (CD)$  și  $m(\angle AOD) = 2 \cdot m(\angle DOB) \Rightarrow m(\angle COB) = \dots\dots$
- ⑩1p 7).  $\angle AOB$ ,  $\angle BOC$ ,  $\angle COD$  și  $\angle DOA$  sunt unghiuri în jurul unui punct astfel încât  $\angle BOC$  este unghi drept,  $m(\angle DOC) = 21^\circ$  și  $m(\angle AOB)$  este cu  $27^\circ$  mai mare decât  $m(\angle AOD)$ . Demonstrați că D, O și E sunt puncte coliniare unde (OE este bisectoarea unghiului  $\angle AOB$ ).

## Testul 2

- 1). Desenați : ⑤1p a). un unghi cu măsura de  $110^\circ$ .  
 ⑤1p b). două unghiuri adiacente suplementare.  
 ⑤1p c). bisectoarea unghiului având măsura de  $40^\circ$ .
- ⑤1p 2). Suplementul unghiului de  $82^\circ$  are măsura de .....
- ⑦1p 3). Complementul unghiului de  $43^\circ 24' 16''$  are măsura de .....
- ⑦1p 4). Măsura unghiului format de două unghiuri adiacente complementare este egală cu .....
- ⑨1p 5). Unghiurile  $\angle AOB$ ,  $\angle BOC$  și  $\angle COA$  sunt unghiuri formate în jurul unui punct. Dacă  $m(\angle AOB) = 2 \cdot m(\angle BOC)$  și cu  $40^\circ$  mai mică decât  $m(\angle AOC)$ , (ON și (OM sunt bisectoarele unghiurilor  $\angle AOC$  respectiv  $\angle AOB$ , să se afle  $m(\angle MON)$ .
- ⑩1p 6). Fie punctele A, O, B coliniare iar C, D și E de aceeași parte a dreptei AB astfel încât (OD este bisectoarea  $\angle COE$ . Dacă  $m(\angle AOC) = 80^\circ$  și  $m(\angle DOB) = 70^\circ$ , să se afle  $m(\angle COE)$ .
- ⑨1p 7). Să se afle măsurile unghiurilor  $\angle AOB$  și  $\angle BOC$  adiacente complementare dacă  $m(\angle AOB)$  este de 5 ori mai mare decât  $m(\angle BOC)$ .

# Capitolul X

## CONGRUENȚA TRIUNGHIURILOR

### Construcția triunghiurilor

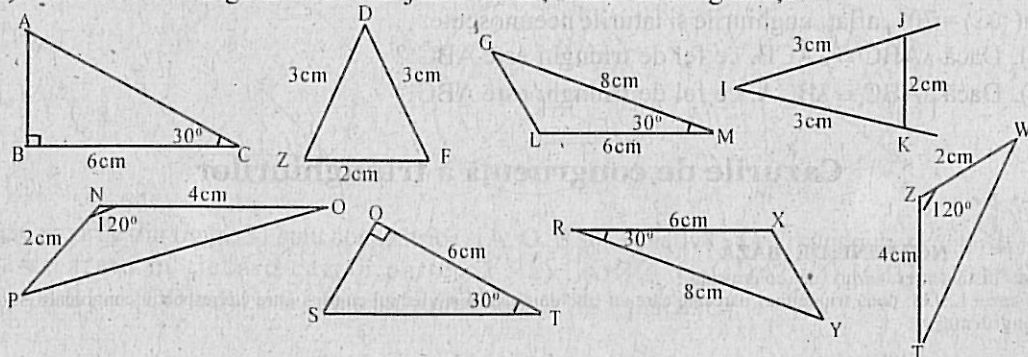
#### PROBLEME

**\*\***

- 1). În triunghiul  $\triangle PQR$  isoscel, perimetrul este 42 cm și o latură are 15 cm. Să se afle celelalte laturi.
- 2). În triunghiul  $\triangle ABC$ , perimetrul este 64 cm și  $AB = 2 \cdot BC$  și  $AC = BC + 4$  cm. Să se afle laturile triunghiului.
- 3). Să se afle laturile unui triunghi dacă sunt direct proporționale cu 4; 5; 8 și perimetrul este 68 cm.
- 4). Să se afle laturile unui triunghi  $\triangle ABC$  știind că perimetrul lui este 39 cm și  $AC$  reprezintă 80% din  $AB$ , iar  $BC$  reprezintă 120% din  $AB$ .
- 5). Să se determine laturile unui triunghi dacă perimetrul este 94 cm și laturile sunt invers proporționale cu 1,2; 0,9; 1,5.
- 6). Să se afle laturile triunghiului  $\triangle ABC$  pentru care perimetrul este 147 cm și  $AC/AB = 5/8$  iar  $AC/2 = 3/4 \cdot BC$ .
- 7). Să se construiască triunghiul  $\triangle ABC$  știind că  $AB = 6$  cm,  $AC = 5$  cm,  $m(\angle A) = 70^\circ$ .
- 8). Să se construiască triunghiul  $\triangle MNP$  și bisectoarea unghiului  $\angle N$ , știind că  $MN = 8$  cm,  $NP = 8$  cm,  $m(\angle N) = 30^\circ$ . Ce fel de triunghi este?
- 9). Să se construiască triunghiul  $\triangle ABC$  dacă  $AB = 6$  cm,  $AC = 3$  cm,  $BC = 5$  cm.
- 10). Să se construiască triunghiul  $\triangle ABC$  dacă  $m(\angle A) = 60^\circ$ ,  $m(\angle B) = 35^\circ$ ,  $AB = 6$  cm.
- 11). Să se construiască triunghiul  $\triangle ABC$  dacă  $m(\angle A) = 50^\circ$ ,  $m(\angle C) = 50^\circ$  și  $AC = 4$  cm.
- 12). Să se construiască triunghiul  $\triangle ABC$  dacă  $m(\angle B) = 40^\circ$ ,  $m(\angle C) = 20^\circ$  iar  $BC = 8$  cm. Ce fel de triunghi este?
- 13). Să se construiască triunghiul  $\triangle ABC$  știind că  $m(\angle B) = 90^\circ$ ,  $m(\angle C) = 20^\circ$  și  $BC = 4$  cm. Ce fel de triunghi este?
- 14). Să se construiască triunghiul  $\triangle ABC$  dacă  $m(\angle C) = 130^\circ$ ,  $AC = 4$  cm și  $CB = 4$  cm. Ce fel de triunghi este?
- 15). Să se construiască triunghiul  $\triangle ABC$  știind că  $AB = 6$  cm,  $AC = 6$  cm,  $BC = 6$  cm. Ce fel de triunghi este?
- 16). Să se construiască triunghiul  $\triangle ABC$  cu  $AC = 5$  cm,  $m(\angle A) = 40^\circ$  iar  $AD = 8$  cm unde  $AD$  este bisectoarea unghiului  $A$ ,  $D \in (BC)$ .

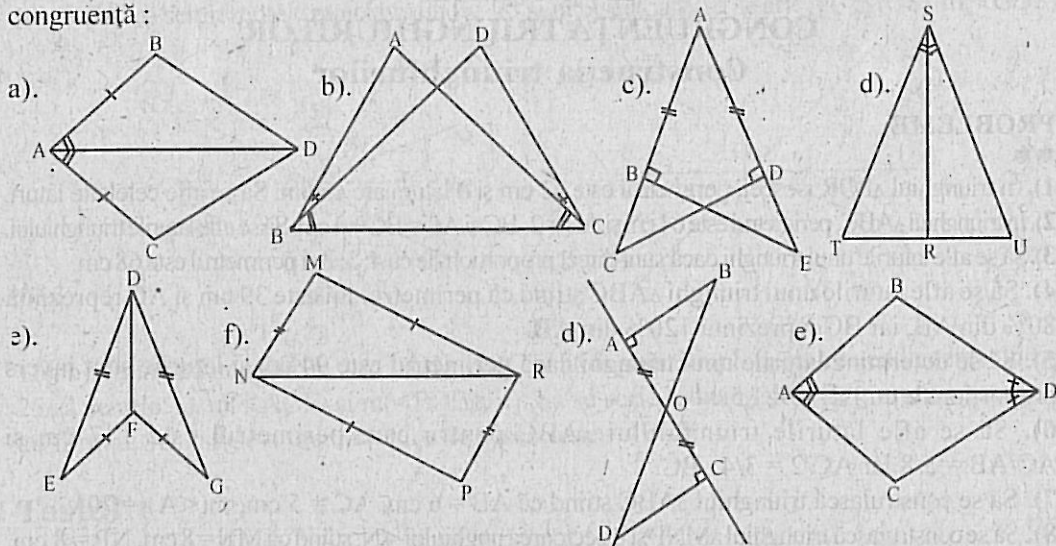
### Triunghiuri congruente

- 1). Care dintre triunghiurile de mai jos. Precizați cazul de congruență :

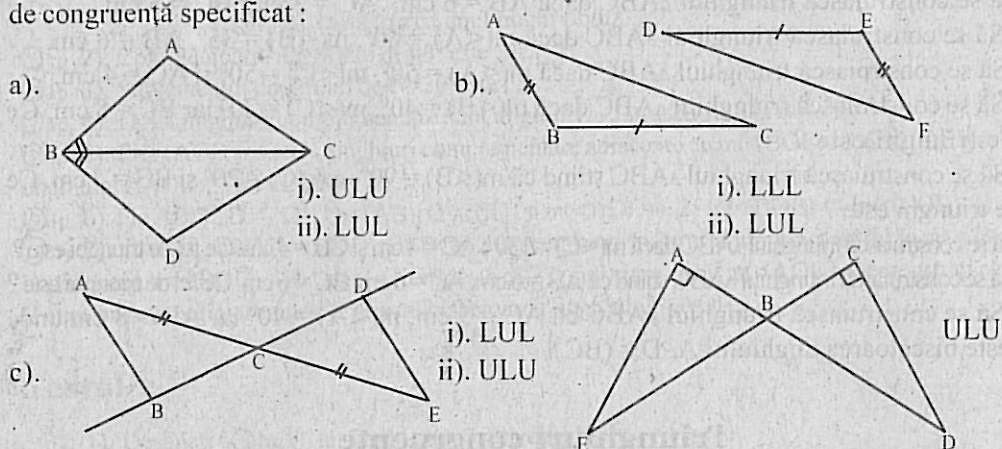




2). În fiecare din figurile, următoare căutați triunghiuri congruente și precizați cazul de congruență :



3). Adăugați voi două laturi congruente sau două unghiuri congruente ca să se aplice cazul de congruență specificat :



4). Dacă se știe că  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ , precizați unghiurile și laturile congruente.

5). Dacă  $\triangle ABC \equiv \triangle KLM$ ,  $m(\angle A) = 30^\circ$ ,  $KL = 6$  cm,  $m(\angle B) = 80^\circ$ ,  $BC = 3$  cm,  $KM = 7$  cm,  $m(\angle C) = 70^\circ$ , aflați unghiurile și laturile necunoscute.

6). Dacă  $\triangle ABC \equiv \triangle ACB$ , ce fel de triunghi este ABC ?

7). Dacă  $\triangle ABC \equiv \triangle BCA$ , ce fel de triunghi este ABC ?

## Cazurile de congruență a triunghiurilor



### NOTIUNI DE BAZĂ

- se disting trei cazuri de congruență :

i). cazul L.U.L.: două triunghiuri oarecare care au câte două laturi și unghiul cuprins între ele respectiv congruente, sunt congruente;

- ii). cazul U.L.U. : două triunghiuri oarecare care au câte o latură și unghiurile alăturate ei respectiv congruente, sunt congruente;  
 iii). cazul L.L.L. : două triunghiuri oarecare care au laturile respectiv congruente, sunt congruente.  
 - pentru a dovedi că două segmente (două unghiuri) sunt congruente, cautăm să încadrăm segmentele (unghiurile) respective în două triunghiuri a căror congruență poate fi demonstrată.

## PROBLEME

\*

- 1). În figura 26 : A, O, B și respectiv C, O, D sunt puncte coliniare, astfel încât  $AO = 5 \text{ cm}$ ,  $OB = 5 \text{ cm}$ ,  $m(\angle OAC) = m(\angle OBD) = 90^\circ$ , să se arate că : a).  $\triangle AOC \equiv \triangle BOD$ ; b).  $[OC] \equiv [OD]$ ; c).  $[AC] \equiv [DB]$ ; d).  $\triangle COB \equiv \triangle DOA$ .

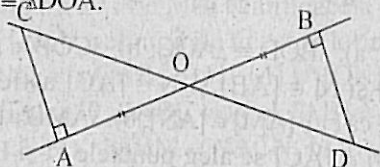


Fig. 26

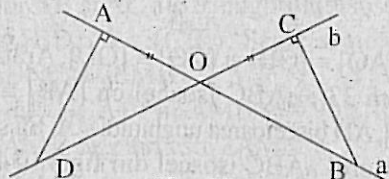


Fig. 27

- 2). În figura 27 se știe că  $a \cap b = \{O\}$  și  $A, B \in a$ ;  $C, D \in b$  astfel încât  $OA = 6 \text{ cm}$ ,  $OC = 6 \text{ cm}$ ,  $m(\angle OAD) = m(\angle OCB) = 90^\circ$ . Să se arate că : a).  $\triangle AOD \equiv \triangle COB$ ; b).  $[OD] \equiv [OB]$ ; c).  $[AD] \equiv [CB]$ .  
 3). Pe laturile unui unghi cu vârful C (vezi fig. 28) se aleg punctele A și B astfel încât  $[CA] \equiv [CB]$  și se duce bisectoarea unghiului care se intersectează cu  $[AB]$  în O. Să se arate că : a).  $\triangle COB \equiv \triangle COA$ ; b).  $[OB] \equiv [OA]$ ; c).  $\angle A \equiv \angle B$ ; d).  $\angle COB \equiv \angle COA$ .

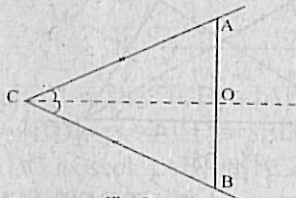


Fig. 28

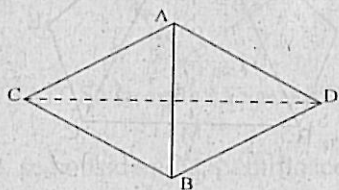


Fig. 29

- 4). Dacă două triunghiuri echilaterale  $\triangle ABC$  și  $\triangle ABD$  au o latură comună, atunci ele sunt congruente. (Justificați)

\*\*

- 5). Pe laturile unui triunghi  $\triangle ABC$  isoscel ( $[AB] \equiv [AC]$ ) se construiesc în afară  $\triangle ABD$  și  $\triangle ACE$  echilaterale. Să se arate că  $\triangle ABD \equiv \triangle ACE$ .  
 6). În figura 29 :  $\triangle ABC$  și  $\triangle ABD$  echilaterale au latura AB comună. Cercetați ce fel de triunghiuri sunt  $\triangle ACD$  și  $\triangle BCD$ .  
 7). Pe cercul de centru O din figura 30 se aleg două puncte A și B și fie M mijlocul lui  $[AB]$ . Să se arate că  $\triangle OMA \equiv \triangle OMB$ .

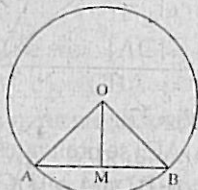


Fig. 30

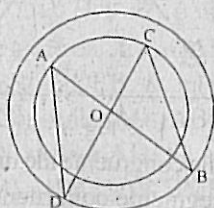
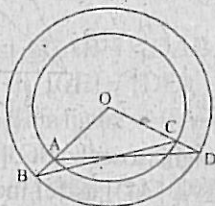
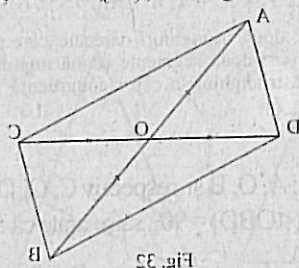
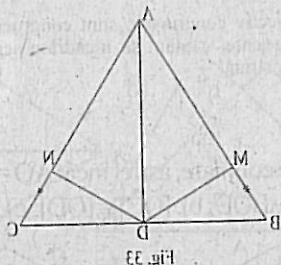


Fig. 31

- 8). Cercurile din figura 31 sunt concentrice și A, O, B și respectiv C, O, D sunt puncte coliniare. Să se arate în fiecare caz în parte că : a).  $\triangle OBC \equiv \triangle ODA$ ; b).  $[CB] \equiv [DA]$ ; c).  $[AB] \equiv [CD]$ ; d) ce fel de triunghiuri sunt  $\triangle OBD$  și  $\triangle OAC$  ?

9). Pe cele două drepte concurente  $a$  și  $b$  din figura 32,  $a \cap b = \{O\}$ , se aleg  $A, B \in a$  și  $C, D \in b$



astfel încât  $[AO] \equiv [OB]$  și  $[CO] \equiv [OD]$ . Arătați că : a).  $\triangle BOD \equiv \triangle AOC$ ; b).  $\triangle COB \equiv \triangle DOA$ .

10). În figura 33 :  $\triangle ABC$  isoscel cu  $[AB] \equiv [AC]$  și  $M \in [AB]$  și  $N \in [AC]$  astfel încât  $[BM] \equiv [CN]$ ,  $AD$  bisectoarea unghiului  $\angle A$ . Să se arate că : a).  $[AM] \equiv [AN]$ ; b).  $\triangle AMD \equiv \triangle AND$ .

11). În exteriorul  $\triangle ABC$  isoscel din figura 34,  $[AB] \equiv [AC]$  se aleg punctele  $D$  și  $E$  astfel încât  $\angle DAM \equiv \angle EAM$ , unde  $AM$  este bisectoarea unghiului  $A$ , și  $[AE] \equiv [AD]$ . Să se arate că : a).  $\angle DAB \equiv \angle EAC$ ; b).  $\triangle DAB \equiv \triangle EAC$ .

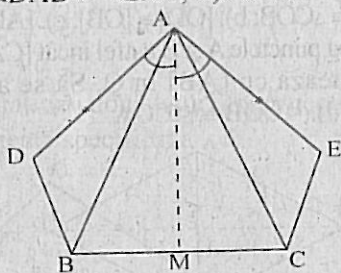


Fig. 34

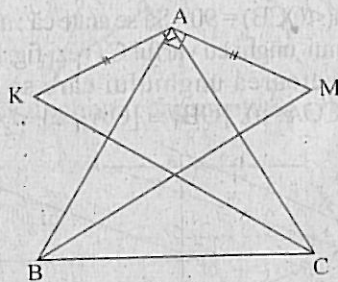


Fig. 35

12). În figura 35 :  $\triangle ABC$  isoscel,  $[AB] \equiv [AC]$  și  $m(\angle MAB) = m(\angle KAC) = 90^\circ$ ,  $[AM] \equiv [AK]$ . Să se arate că : a).  $\triangle AMB \equiv \triangle AKC$ ; b).  $[MB] \equiv [KC]$ .

13). În figura 36 :  $\triangle ABC$  isoscel,  $[AB] \equiv [AC]$  și  $m(\angle MAC) = m(\angle NAB) = 90^\circ$ ,  $[AN] \equiv [AM]$ . Să se arate că : a).  $\triangle ABN \equiv \triangle ACM$ ; b).  $[NB] \equiv [MC]$ .

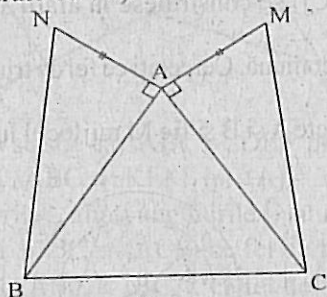


Fig. 36

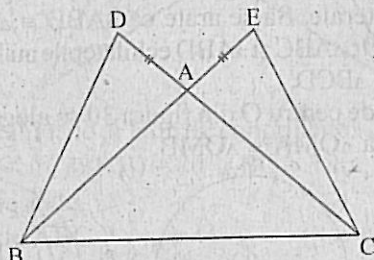


Fig. 37

14). Laturile congruente ale unui triunghi isoscel  $ABC$ ,  $[AB] \equiv [AC]$  se prelungesc ca în figura 37, cu două segmente congruente  $[AE] \equiv [AD]$  astfel încât  $A \in [EB]$  și  $A \in [DC]$ . Arătați că : a).  $\triangle ADB \equiv \triangle AEC$  b).  $[DB] \equiv [EC]$ .

15). Pe laturile unui unghi cu vârful în  $A$ , se aleg punctele  $B, D, C$  și  $E$  astfel încât  $[AD] \equiv [AB]$  și  $[AE] \equiv [AC]$ , ca în figura 38. Să se arate că : a).  $\triangle ADC \equiv \triangle ABE$ ; b).  $\angle OED \equiv \angle OCB$ ,  $[BC] \equiv [DE]$ ,  $[BE] \equiv [CD]$ ; c).  $\triangle BOC \equiv \triangle DOE$ , unde  $BE \cap CD = \{O\}$ .



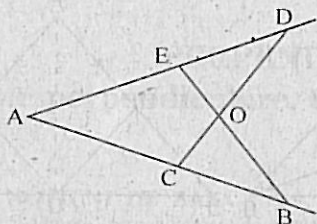


Fig. 38

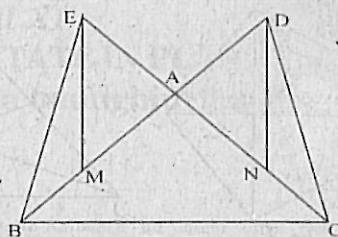


Fig. 39

16). În figura 39 : fie M și N mijloacele laturilor AB și AC ale triunghiului isoscel  $\triangle ABC$  și  $[AD] \equiv [AE]$  prelungirile acestor laturi. ( $A \in [BD]$ ,  $A \in [CE]$ ). Să se arate că :

a).  $\triangle AND \equiv \triangle AME$ ; b).  $[EM] \equiv [DN]$ ; c).  $\triangle DNC \equiv \triangle EMB$ .

17). În figura 40 :  $\triangle ABC$  isoscel,  $[AB] \equiv [AC]$ ,  $m(\angle NCA) = m(\angle MBA) = 90^\circ$ ,  $[CN] \equiv [MB]$ . Arătați că : a).  $\angle ABM \equiv \angle ACN$ ; b).  $[AN] \equiv [AM]$ ; c). cum este  $\triangle AMN$  ?

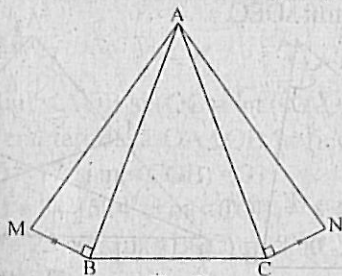


Fig. 40

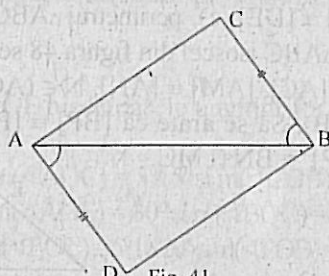


Fig. 41

18). În figura 41 se știe :  $[CB] \equiv [AD]$  și  $\angle CBA \equiv \angle BAD$ . Să se arate că : a).  $\triangle ACB \equiv \triangle BDA$ ; b).  $[AC] \equiv [BD]$ ; c).  $\triangle ACD \equiv \triangle BDC$ .

19). În  $\triangle ABC$  isoscel,  $[AB] \equiv [AC]$ , din figura 42, se consideră M, N mijloacele laturilor  $[AB]$  și  $[AC]$ , iar AD bisectoarea unghiului  $\angle A$ . Arătați că : a).  $\triangle AMD \equiv \triangle AND$ ; b).  $[MD] \equiv [ND]$ ; c).  $\angle AMD \equiv \angle AND$ ; d).  $\angle BMD \equiv \angle CND$ ; e).  $\triangle BMD \equiv \triangle CND$ .

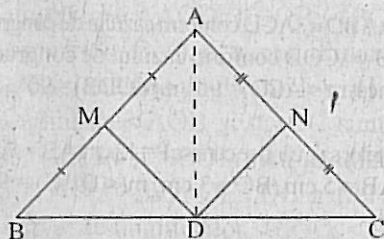


Fig. 42

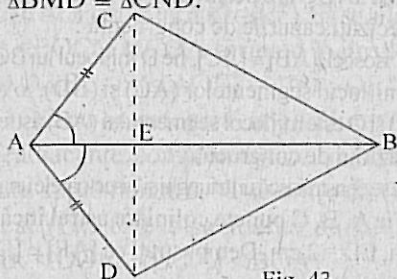


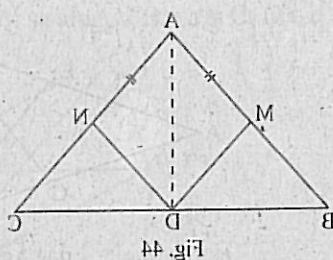
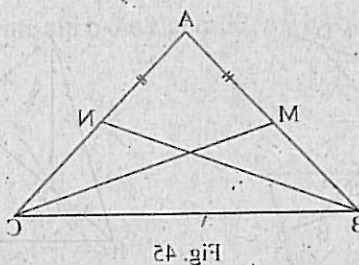
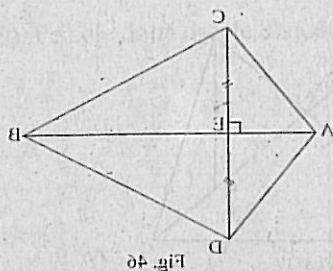
Fig. 43

20). În figura 43 se știe :  $[AC] \equiv [AD]$  și  $\angle CAB \equiv \angle DAB$ . Să se arate că : a).  $\triangle CAB \equiv \triangle DAB$ ; b).  $[CB] \equiv [DB]$ ; c).  $\angle CBA \equiv \angle DBA$ ; d).  $[CE] \equiv [DE]$ ; e).  $\triangle CEB \equiv \triangle DEB$ ; f).  $m(\angle AEC) = ?$

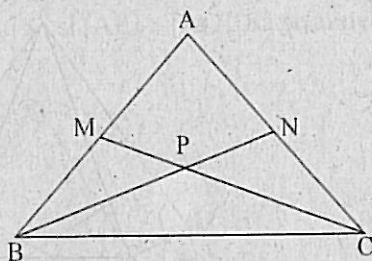
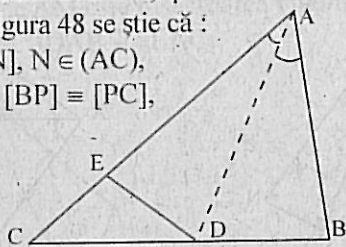
21). Pe laturile congruente ale  $\triangle ABC$  isoscel din figura 44 ( $[AB] \equiv [AC]$ ), se aleg  $M \in (AB)$  și  $N \in (AC)$  astfel încât  $[AM] \equiv [AN]$  și se duce bisectoarea unghiului  $\angle A$ , notată AD. Să se arate :

a).  $\triangle AMD \equiv \triangle AND$ ; b).  $[MD] \equiv [ND]$ ; c).  $\angle AMD \equiv \angle AND$ ; d).  $[MB] \equiv [NC]$ ; e).  $\angle BMD \equiv \angle CND$ ; f).  $\triangle BMD \equiv \triangle CND$ .

22). Fie  $\triangle ABC$  isoscel din figura 45,  $[AB] \equiv [AC]$ ,  $M \in (AC)$  și  $N \in (AC)$  astfel încât  $[AM] \equiv [AN]$ . Arătați că : a).  $\triangle ANB \equiv \triangle AMC$ ; b).  $\angle ANB \equiv \angle AMC$ ; c).  $[MC] \equiv [NB]$ ; d).  $[MB] \equiv [NC]$ ; e).  $\angle BMC \equiv \angle CNB$ ; f).  $\triangle BMC \equiv \triangle CNB$ .



- 23). În figura 46, se știe că  $m(\angle AEC) = 90^\circ$  și  $[CE] \equiv [ED]$ . Să se arate : a).  $\triangle AEC \equiv \triangle AED$ ; b).  $[AC] \equiv [AD]$ ; c).  $\triangle ACB \equiv \triangle ADB$ ; d). ce fel este  $\triangle ACD$  ? ; e). dar  $\triangle CBD$  ?
- 24). În  $\triangle ABC$  din figura 47 se știe  $AB = 4$  cm,  $AC = 7$  cm,  $BC = 8$  cm și  $AD$  bisectoarea unghiului  $\angle A$ ,  $E \in (AC)$  astfel încât  $[AE] \equiv [AB]$ . Să se arate că : a).  $\triangle ABD \equiv \triangle AED$ ; b).  $[BD] \equiv [DE]$ ; c). perimetrul  $\triangle ABC$  d). perimetrul  $\triangle DEC$ .
- 25). În  $\triangle ABC$  isoscel din figura 48 se știe că :  $[AB] \equiv [AC]$ ,  $[AM] \equiv [AN]$ ,  $N \in (AC)$ ,  $M \in (AB)$ . Să se arate că  $[BP] \equiv [PC]$ , unde  $\{P\} = BN \cap MC$ .



## Testul 1

- 5 2p 1). Fie  $\triangle ABC \equiv \triangle DEF$ . Dacă  $AB = 5$  cm,  $m(\angle A) = 80^\circ$ ,  $EF = 7$  cm,  $m(\angle F) = 50^\circ$ , atunci :  
 ① DE = .....; b).  $BC = \dots\dots\dots$ ; c).  $m(\angle D) = \dots\dots\dots$ ; d).  $m(\angle C) = \dots\dots\dots$
- ③ 1p 2). Un triunghi echilateral cu perimetrul de 3,6 cm are lungimea laturii egală cu .....
- ③ 1p 3). Dacă  $\triangle ABC$  are perimetrul de 15 cm,  $AB = 6$  cm,  $AC = 3$  cm atunci triunghiul este .....
- 7 2p 4). Precizați cazurile de congruență :  
 a). În  $\triangle ABC$  isoscel,  $[AB] \equiv [AC]$ , fie  $D$  mijlocul lui  $BC$  :  $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$  conform cazului de congruență .....  
 b).  $O$  este mijlocul segmentelor  $(AC)$  și  $(BD)$ ,  $\triangle AOB \equiv \triangle COD$  conform cazului de congruență .....  
 c).  $O \in (CD)$  și  $O$  este mijlocul segmentului  $(AB)$  astfel încât  $m(\angle ACO) = 90^\circ$ ,  $m(\angle ODB) = 90^\circ$ ,  $\triangle ACO \equiv \triangle BDO$  conform cazului de congruență .....
- ② 2p 5). Să se construiască un triunghi și bisectoarele unghiurilor sale când se cunosc  $P = 12$  cm,  $AB = 5$  cm,  $AC = 4$  cm.
- 10 1p 6). Fie  $A, B, C$  puncte coliniare astfel încât  $AB = 5$  cm,  $BC = 3$  cm,  $m(\angle DBC) = 90^\circ$ ,  $E \in (DB)$ ,  $DB = 5$  cm,  $ED = 2$  cm. Demonstrați că  $[AE] \equiv [DC]$ .

## Testul 2

- ③ 2p 1). Să se construiască  $\triangle ABC$  care are  $AB = 10$  cm,  $BC = 8$  cm și  $AC = 6$  cm.
- ③ 1p 2). Să se construiască  $\triangle ABC$  care are  $AB = 5$  cm,  $m(\angle A) = 28^\circ$ ,  $m(\angle B) = 75^\circ$ .
- ③ 1p 3). Să se construiască  $\triangle DEF$  care are  $DE = 4$  cm,  $EF = 6$  cm și  $m(\angle E) = 90^\circ$ .
- 9 1p 4). Fie  $AB = 10$  cm. Din punctul  $O$ , mijlocul său, se construiesc, în același semiplan, segmentele  $(OM)$  și  $(ON)$  de aceeași lungime, astfel încât  $(ON)$  este bisectoarea  $\angle AOM$  și  $(OM)$  este bisectoarea  $\angle NOB$ . Să se demonstreze că  $[MA] \equiv [NB]$  și  $[NA] \equiv [MB]$ .
- 9 1p 5). Să se afle perimetrul triunghiului  $ABC$  care are  $AB = 10$  cm și  $BC = 6$  cm.
- 6). În  $\triangle ABC$  se cunosc  $BC = 12$  cm,  $AB = 9$  cm și  $AC = 10$  cm. Fie  $(BM)$  bisectoarea  $\angle ABC$ ,  $M \in (AC)$  și  $N \in (BC)$  astfel încât  $[BN] \equiv [BA]$ .
- ⑦ 2p a). Arătați că  $\triangle BNM \equiv \triangle BAM$ .
- 10 1p b). Aflați perimetrul  $\triangle MNC$ .

## Capitolul XI PERPENDICULARITATE ÎN PLAN

### Drepte perpendiculare. Construcția triunghiurilor dreptunghice



#### NOȚIUNI DE BAZĂ

- se numesc drepte perpendiculare două drepte concurente care formează un unghi drept. Deci rezultă că se formează patru unghiuri drepte.
- notație :  $d \perp d$
- prin distanța de la un punct la o dreaptă se înțelege lungimea segmentului determinat de punct și piciorul perpendiculare coborâte din punct pe dreaptă.
- se numește mediatoarea unui segment dreapta perpendiculară pe segment în mijlocul segmentului.
- două triunghiuri dreptunghice care au catetele respectiv congruente, sunt congruente
- două triunghiuri dreptunghice care au câte o catetă și un unghi ascuțit respectiv congruente sunt congruente.
- două triunghiuri dreptunghice care au ipotenuzele congruente și câte unul din unghiurile ascuțite congruente sunt congruente.
- două triunghiuri dreptunghice care au ipotenuzele și câte o catetă respectiv congruente sunt congruente.

#### PROBLEME

\*

- 1). Fie unghiul  $\angle AOB$  și  $(OC \in \text{int}(\angle AOB))$ ;  $(OE$  și  $(OF$  bisectoarele unghiurilor  $\angle AOC$  și  $\angle COB$ . Cercetați dacă  $OA \perp OB$  în fiecare caz :
- |   |   |
|---|---|
| a). $m(\angle AOC) = 17^\circ$ și $m(\angle COB) = 73^\circ$                  | b). $m(\angle AOC) = 3^\circ 15'$ și $m(\angle COB) = 87^\circ 45'$           |
| c). $m(\angle AOC) = 84^\circ 15' 14''$ și $m(\angle COB) = 5^\circ 44' 46''$ | d). $m(\angle AOE) = 30^\circ$ și $m(\angle BOC) = 30^\circ$                  |
| e). $m(\angle AOE) = 25^\circ 40'$ și $m(\angle BOC) = 38^\circ 40'$          | f). $m(\angle EOC) = 5^\circ 18' 20''$ și $m(\angle FOB) = 39^\circ 41' 40''$ |
| g). $m(\angle EOF) = 45^\circ$  |   |

\*\*

- 2). Dacă două unghiuri sunt adiacente suplementare, să se arate că bisectoarele lor sunt perpendiculare.
- 3). Fie punctele A, O, B coliniare și punctele C, D, E, F de aceeași parte a drepte AB astfel încât  $\angle BOC \equiv \angle COD \equiv \angle FOA$ ;  $m(\angle DOE) = 62^\circ$  și  $m(\angle EOF) = m(\angle FOA) + 6^\circ$ . Să se arate că  $OC \perp OE$ .
- 4). Fie  $AO \perp OC$  și  $(OF$  bisectoarea unghiului  $\angle AOC$ ;  $E \in OF$  astfel încât  $O \in (EF)$ . Să se afle  $m(\angle AOE)$ .
- 5). Se dau unghiurile  $\angle AOD$ ;  $\angle DOB$ ;  $\angle BOE$ ;  $\angle EOC$  și  $\angle COA$  formate în jurul unui punct astfel încât punctele B, O, C sunt coliniare,  $AO \perp BC$ ,  $m(\angle AOE) = 160^\circ$ ;  $OE \perp OD$ . Să se afle  $m(\angle COE)$  și măsura unghiului format de (OD cu bisectoarea unghiului  $\angle EOC$ .
- 6). Dacă unghiurile  $\angle AOB$  și  $\angle AOC$  sunt neadiacente complementare,  $m(\angle AOB) = 30^\circ$  și unghiurile  $\angle COA$  și  $\angle COD$  sunt neadiacente suplementare, să se arate că  $OD \perp OB$ .
- 7). Fie  $AC \cap BD = \{O\}$ ,  $OE \perp DB$  astfel încât (OC este bisectoarea unghiului  $\angle BOE$ . Să se afle măsurile unghiurilor  $\angle EOC$ ;  $\angle COB$ ;  $\angle DOE$ ;  $\angle DOA$ ;  $\angle BOA$ .
- 8). Fie  $\angle AOB$ ;  $\angle BOC$ ;  $\angle COD$ ;  $\angle DOE$ ;  $\angle EOF$ ;  $\angle FOA$  șase unghiuri congruente, formate în jurul unui punct. Dacă (OM, (ON sunt bisectoarele unghiurilor  $\angle AOB$  și  $\angle DOE$ , să se arate că: a). M, O, N puncte coliniare; C, O, F coliniare; A, O, D coliniare; b).  $MN \perp FC$ .
- 9). Fie unghiurile  $\angle AOB$  și  $\angle AOC$  unghiuri neadiacente suplementare,  $m(\angle AOB) = 54^\circ$ . Dacă (OE este bisectoarea unghiului  $\angle BOC$ , să se arate că  $OE \perp OA$ .
- 10). Fie unghiurile  $\angle AOB$  și  $\angle AOC$  unghiuri neadiacente complementare,  $m(\angle AOB) = 20^\circ$ . Se consideră semidreapta (OD astfel încât  $m(\angle COD) = 40^\circ$  și semidreapta (OC  $\in \text{int}(\angle AOD)$ . Dacă (OE este bisectoarea unghiului  $\angle COD$ , să se arate că  $OD \perp OB$  și  $OA \perp OE$ .
- 11). Fie unghiurile  $\angle AOB$  și  $\angle AOC$  neadiacente suplementare, unghiurile  $\angle AOE$  și  $\angle AOB$  adiacente complementare,  $m(\angle AOB) = 45^\circ$ . Să se arate că : a).  $BO \perp OC$ ; b). E, O, C puncte coliniare.



- 12). Fie punctele A, O, B coliniare și E, D, C puncte de aceeași parte a dreptei AB astfel încât  $EO \perp OC$ ,  $m(\angle BOC) = 40^\circ$  și  $m(\angle COD) = 25^\circ$ . Dacă (OF este bisectoarea unghiului  $\angle EOA$  să se arate că  $OD \perp OF$ .
- 13). Fie  $\angle AOB$ ;  $\angle BOC$ ;  $\angle COD$ ;  $\angle DOE$ ;  $\angle EOF$  și  $\angle FOA$  unghiuri formate în jurul unui punct astfel încât  $m(\angle AOB) = 80^\circ$ ,  $m(\angle BOC) = 50^\circ$ ,  $m(\angle EOD)$  este jumătate din  $m(\angle AOB)$ ,  $m(\angle FOE) = 30^\circ$  și  $AO \perp OF$ . Dacă (OM și (ON sunt bisectoarele unghiurilor  $\angle AOB$  și  $\angle DOE$ , să se arate că : a).  $OC \perp OM$ ; b).  $OC \perp ON$ ; c). M, N, O puncte coliniare.

## Cazurile de congruență ale triunghiurilor dreptunghice

\*

- 1). Să se construiască triunghiul  $\triangle DEF$  cu  $DE = 7,5$  cm,  $m(\angle D) = 45^\circ$  și  $m(\angle E) = 70^\circ$ . Să se construiască distanțele de la D la EF, de la E la FD și de la F la DE.
- 2). Să se construiască triunghiul  $\triangle FEG$  cu  $FE = 6$  cm,  $m(\angle F) = 30^\circ$  și  $m(\angle E) = 40^\circ$ . Să se construiască distanțele de la F la EG, de la E la FG și de la G la FE.

\*\*

- 3). Pe laturile congruente ale  $\triangle ABC$  isoscel din figura 49 ( $[AB] \equiv [AC]$ ), se duc perpendicularele  $AE \perp AB$ ,  $AD \perp AC$  astfel încât  $[AD] \equiv [AE]$ . Arătați că : a).  $\angle DAB \equiv \angle EAC$ ; b).  $\triangle DAB \equiv \triangle EAC$ ; c).  $[DB] \equiv [EC]$ ; d).  $(DC) \equiv (BE)$ .
- 4). Să se construiască triunghiurile dreptunghice, dacă se cunosc :
- $\triangle ABC$  :  $AB = 5$  cm,  $m(\angle B) = 30^\circ$ ,  $m(\angle A) = 90^\circ$ ;
  - $\triangle ABC$  :  $AB = 3$  cm,  $m(\angle A) = 70^\circ$ ,  $m(\angle B) = 90^\circ$ ;
  - $\triangle ABC$  :  $CB = 5$  cm,  $AC = 3$  cm,  $m(\angle C) = 90^\circ$ ;
  - $\triangle ABC$  :  $AB = 6$  cm,  $[AB] \equiv [AC]$ ,  $m(\angle A) = 90^\circ$ ;
  - $\triangle ABC$  :  $AC = 8$  cm,  $m(\angle C) = 30^\circ$ ,  $m(\angle B) = 90^\circ$ ;
  - $\triangle ABC$  :  $AB = 10$  cm,  $m(\angle A) = 45^\circ$ ,  $m(\angle C) = 90^\circ$ ;
- 5). Pe drepte concurente  $a \cap b = \{O\}$  se aleg  $A, B \in a$  și  $C, D \in b$  astfel încât  $O \in (AB)$  și  $O \in (CD)$ ,  $AD \perp OD$ ,  $CB \perp OB$ ,  $[OC] \equiv [OA]$ . Demonstrați că  $\triangle AOD \equiv \triangle COB$ .
- 6). Pe laturile unghiului  $\angle XOY$ , fie  $C \in (OX)$  și  $A \in (OY)$  astfel încât  $[OC] \equiv [OA]$  și se duc  $CB \perp OY$  și  $AD \perp OX$ ,  $B \in (OY)$ ,  $D \in (OX)$ . Să se arate că  $\triangle OCB \equiv \triangle ODA$  și  $\triangle DMC \equiv \triangle BAM$ ,  $\{M\} = AD \cap BC$ .
- 7). În  $\triangle ABC$  isoscel,  $(AB) \equiv (AC)$  se duce  $AD \perp BC$ ,  $D \in (BC)$ . Demonstrați că D este mijlocul lui (BC).
- 8). De aceeași parte a dreptei AB se aleg punctele C și D astfel încât  $(AC) \equiv (DB)$  și  $m(\angle ACB) = m(\angle BDA) = 90^\circ$ . Arătați că : a).  $(BC) \equiv (AD)$ ; b).  $(CO) \equiv (DO)$ , unde  $\{O\} = AD \cap CB$ .
- 9). Fie C și D puncte de o parte și de alta a dreptei a astfel încât  $d(C; a) = d(D; a)$ . Dacă  $\{O\} = CD \cap a$ , demonstrați că O este mijlocul lui CD.
- 10). Fie  $\triangle ABC$  isoscel cu  $(AB) \equiv (AC)$  și M mijlocul lui (BC). Demonstrați că  $AM \perp BC$ .
- 11). În  $\triangle ABC$  se duce  $AD \perp BC$  și se știe că D este mijlocul lui (BC). Demonstrați că  $\triangle ABC$  este isoscel.
- 12). Pe laturile unui unghi  $\angle xOy$  se aleg  $A \in Ox$ ,  $B \in Oy$  astfel încât  $(OA) \equiv (OB)$ . Dacă  $M, N \in \text{int } \angle(xOy)$  astfel încât  $MA \perp Ox$ ,  $NB \perp Oy$ ,  $(MA) \equiv (NB)$ , arătați că : a).  $(MO) \equiv (NO)$ ; b). demonstrați că bisectoarea  $\angle(xOy)$  este bisectoare și pentru  $\angle MON$ .

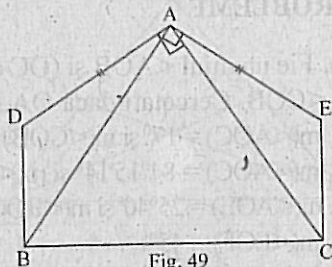


Fig. 49

## Bisectoarea și mediatoarea

**\***

1). Să se arate că un punct oarecare  $C$  de pe mediatoarea unui segment  $[AB]$  este egal depărtat de capetele segmentului.

**\*\***

2). În  $\triangle ABC$  din figura 50,  $[AB] = 8$  cm,  $AC = 6$  cm și  $DE$  mediatoarea laturii  $BC$ ,  $E \in (BC)$ ,  $D \in (AB)$ . Arătați că :

a).  $\triangle DEB \equiv \triangle DEC$ ; b).  $[DB] \equiv [DC]$ ; c). perimetrul  $\triangle ADC$ .

3). Demonstrați că orice punct de pe bisectoarea unui unghi este egal depărtat de laturile unghiului.

4). Fie  $\triangle ADB$  și  $\triangle ACB$  dreptunghice în  $D$  și respectiv în  $C$ ,

astfel încât  $\angle DAB \equiv \angle CBA$  ( $D$  și  $C$  de aceeași parte a lui  $AB$ ). Arătați că : a).  $\triangle DAB \equiv \triangle CBA$ ;

b).  $\triangle DAO \equiv \triangle CBO$ ,  $BD \cap CA = \{O\}$ ; c).  $O$  aparține mediatoarei segmentului  $(AB)$  și segmentului  $(CD)$ .

5). În  $\triangle ABC$  isoscel  $(AB) \equiv (AC)$ , fie  $O$  intersecția dreptelor  $BM$  și  $CN$ , unde  $M$  este mijlocul lui  $(AC)$ ,  $N$  este mijlocul lui  $(AB)$ . Arătați că  $AO$  este mediatoarea segmentului  $BC$ .

6). În capetele segmentului  $AB$  se ridică perpendicularele  $AC \perp AB$  și  $BD \perp AB$ ,  $(AC) \equiv (BD)$ , de aceeași parte a lui  $AB$ . Fie  $CB \cap AD = \{O\}$ . Să se arate că  $O$  aparține mediatoarei lui  $(AB)$ .

7). Fie  $\triangle ABC$  și  $B \in (AE)$ ,  $C \in (AF)$ . Dacă bisectoarele  $\angle EBC$  și  $\angle FCB$  se intersectează în  $O$ , Arătați că  $AO$  este bisectoarea lui  $\angle BAC$ .

8). Pe laturile unui unghi cu vârful în  $O$  se aleg punctele  $A$  și  $B$  ai  $(AO) \equiv (BO)$ ,  $A \neq B$ . Dacă mediatoarele segmentelor  $(AO)$  și  $(BO)$  se intersectează în  $M$ , să se arate că  $OM$  este bisectoarea  $\angle O$ .

9). Să se construiască cercul înscris în triunghi :

a).  $\triangle ABC$ , când se cunosc :  $AB = 5$  cm;  $AC = 8$  cm;  $\angle A = 60^\circ$

b).  $\triangle ABC$ , când se cunosc :  $AB = 6$  cm;  $\angle B = 120^\circ$ ;  $\angle A = 20^\circ$

c).  $\triangle ABC$ , când se cunosc :  $(AB) \equiv (AC)$ ;  $\angle A = 80^\circ$ ;  $AB = 5$  cm

d).  $\triangle ABC$ , când se cunosc :  $AB = AC = BC = 6$  cm

e).  $\triangle ABC$ , când se cunosc :  $AB = 8$  cm;  $AC = 6$  cm;  $\angle A = 90^\circ$

f).  $\triangle ABC$ , când se cunosc :  $AB = 6$  cm;  $\angle C = 90^\circ$ ;  $\angle B = 60^\circ$ .

10). Să se construiască cercul circumscris triunghiului :

a).  $\triangle ABC$ , când se cunosc :  $AB = 4$  cm;  $AC = 5$  cm;  $\angle A = 150^\circ$

b).  $\triangle ABC$ , când se cunosc :  $AB = 6$  cm;  $\angle A = 40^\circ$ ;  $\angle B = 70^\circ$

c).  $\triangle ABC$ , când se cunosc :  $(AB) \equiv (AC)$ ;  $\angle A = 100^\circ$ ;  $AB = 4$  cm

d).  $\triangle ABC$ , când se cunosc :  $AB = AC = BC = 5$  cm

e).  $\triangle ABC$ , când se cunosc :  $\angle A = 90^\circ$ ;  $AC = 5$  cm;  $\angle C = 45^\circ$

f).  $\triangle ABC$ , când se cunosc :  $AC = 6$  cm;  $\angle B = 90^\circ$ ;  $\angle C = 30^\circ$ .

11). Să se arate că bisectoarea unghiului din vârful unui triunghi isoscel este mediatoarea bazei.

12). În  $\triangle ABC$  se duc  $SC$  și  $SB$  bisectoarele  $\angle C$  și  $\angle B$ , apoi  $SM \perp AB$ ,  $SN \perp AC$ ,  $M \in (AB)$ ,  $N \in (AC)$ . Să se demonstreze că  $SM \equiv SN$ .

13). În  $\triangle ABC$  se duc  $TM$  și  $TN$  mediatoarele laturilor  $(AB)$  și  $(AC)$ ,  $M \in (AB)$ ,  $N \in (AC)$ . Demonstrați că  $\triangle TBC$  este triunghi isoscel.

14). În  $\triangle ABC$  în care  $\angle B \equiv \angle C$  se duc  $AD \perp BC$ ,  $D \in (BC)$ . Demonstrați că  $AD$  este bisectoarea unghiului  $\angle BAC$  și mediatoarea laturii  $(BC)$ .

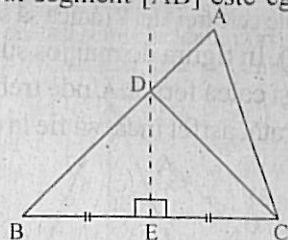
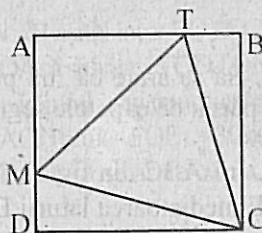


Fig. 50

15). Figura alăturată reprezintă un parc cu aleile MT, TC, MC. Unde trebuie amplasat un felinar care să lumineze la fel de bine toate cele trei alei ? (adică să se afle la egală distanță de cele trei alei).

16). În figura de mai jos sunt reprezentate două localități A și B și calea ferată. Unde trebuie să fie amplasată gara pe calea ferată, astfel încât să fie la distanțe egale de cele două localități ?



A  
\*

B  
\*

calea ferată

## Înălțimea unui triunghi. Aria triunghiului

### PROBLEME

\*

1). În triunghiul  $\triangle ABC$  isoscel  $[AB] = [AC]$  se duce înălțimea  $AD$  și se prelungește cu  $[AD] = [DE]$ . Să se arate că  $\triangle ADC \equiv \triangle EDC$ .

2). Să se afle aria unui triunghi cu o înălțime de 4 cm și latura corespunzătoare acestei înălțimi de 16 cm.

3). Să se afle lungimea înălțimii unui triunghi corespunzătoare unei laturi de 5 cm dacă aria este de 20 cm<sup>2</sup>.

4). Un triunghi dreptunghic are catetele de lungimi 3 cm și 4 cm. Să se afle aria triunghiului.

\*\*

5). Într-un  $\triangle ABC$  se știe  $AD \perp BC$ ,  $D \in BC$ . Să se afle aria triunghiului în următoarele două cazuri :

a).  $BD = 4$  cm,  $BD$  și  $BC$  sunt proporționale cu 1 și 3,  $AD = 8$  cm.

b).  $AD$  este egală cu 25% din  $BC$ ,  $BD$  și  $DC$  sunt direct proporționale cu 2 și 3 și diferența lor este 4.

6). Să se afle o catetă a unui triunghi dreptunghic cu aria de 60 cm<sup>2</sup> și lungimea celeilalte catete de 6 cm.

7). În  $\triangle ABC$  se cunosc  $AB = 5$  cm,  $AC = 6$  cm,  $BB' \perp AC$ ,  $B' \in AC$ ,  $CC' \perp AB$ ,  $C' \in AB$ ,  $BB' = 10$  cm. Să se afle  $CC'$ .

8). În  $\triangle ABC$  cu  $m(\angle C) = 90^\circ$  se cunosc  $CA = 20$  cm,  $CB = 15$  cm,  $AB = 25$  cm. Să se afle înălțimea  $CC'$ , unde  $C' \in (AB)$ .

9). Fie  $\triangle ABC$  cu  $AB = 8$  cm și înălțimea  $CD = 6$  cm,  $D \in (AB)$  și  $\triangle MNP$  cu  $MN = 12$  cm și înălțimea  $PR = 4$  cm,  $R \in (MN)$ . Sunt cele două triunghiuri echivalente ? (Justificați).

10). Fie triunghiul  $\triangle ABC$ , cu laturile  $AB = 12$  cm,  $AC = 16$  cm și  $BC = 24$  cm. Dacă  $AD = 2$  cm,  $AD \perp BC$ , calculați  $BE$ ,  $BE \perp AC$  și  $CF$ ,  $CF \perp AB$ .

11). Fie  $\triangle ABC$  cu  $m(\angle A) = 20^\circ$ ,  $m(\angle B) = 70^\circ$ ,  $AC = 8$  cm și  $BC = 3$  cm. Aflați aria triunghiului.

12). În  $\triangle ABC$  isoscel, ( $AB = AC$ ), se construiesc înălțimile  $BD \perp AC$ ,  $D \in (AC)$  și  $CE \perp AB$ ,  $E \in (AB)$ . Să se demonstreze că  $\triangle BOC$  este isoscel unde  $\{O\} = BD \cap CE$ .

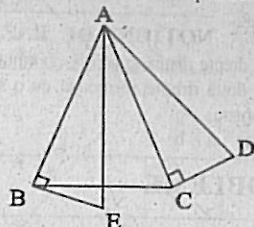
13). Fie  $\triangle ABC$  cu  $AB = 4$  cm,  $BC = 6$  cm și  $BO$  înălțimea lui,  $O \in (AC)$ . Se prelungește  $BO$  cu  $[OD] = [OB]$ . Să se afle perimetrul patrulaterului  $ABCD$ .

14). Fie  $A, B, C$  coliniare,  $B \in (AC)$ ,  $AB = 6$  cm,  $BC = 4$  cm,  $DB \perp AC$ ,  $D \in AC$ ,  $DB = 6$  cm și  $E \in (DB)$ ,  $EB = 4$  cm. Arătați că : a). unghiurile  $\angle EAB$  și  $\angle DCB$  sunt complementare; b).  $AE \perp DC$ ; c).  $CE \perp DA$ .



## Testul 1

- ⑤2p 1). Să se deseneze bisectoarele unui triunghi oarecare și cercul înscris în triunghi.
- ⑤2p 2). Fie unghiul  $\angle AOB$  alungit și semidreptele  $(OC)$ ,  $(OD)$  și  $(OE)$  în același semiplan determinat de dreapta  $AB$ , astfel încât  $m(\angle AOC) = m(\angle DOC) = m(\angle DOE) = m(\angle EOB)$ . Să se scrie toate perechile de semidrepte perpendiculare.
- ⑦2p 3). Fie  $\triangle ABC$  isoscel din figură ( $[AB] = [AC]$ ),  $CD \perp AC$ ,  $EB \perp AB$  și  $[BE] = [CD]$ . Să se demonstreze că  $\triangle AED$  este isoscel.
- 4). Fie dreptele concurente  $AB$  și  $CD$ ,  $AB \cap CD = \{O\}$  și  $(OE \perp AB$  iar  $(OF \perp CD$ . Dacă  $OD$  este bisectoarea  $\angle EOB$  :
- ⑨2p a). să se afle  $m(\angle EOF)$ , semidreptele  $(OE)$  și  $(OF)$  fiind în semiplane diferite față de  $AB$ .
- ⑩1p b). dacă  $M \in (OB)$ , arătați că distanțele de la punctul  $M$  la semidreptele  $(OF)$  și  $(OD)$  sunt egale.



## Testul 2

- ⑤2p 1). Să se deseneze mediatoarele unui triunghi oarecare și cercul circumscris triunghiului.
- 2). Fie  $\angle MON$  alungit iar  $(OP)$  și  $(OQ)$  semidrepte astfel încât  $m(\angle PON) = \frac{1}{2} m(\angle MOQ)$ .  
Dacă  $OQ \perp OP$ , atunci :
- ⑤2p a). să se realizeze desenul;
- ⑤2p b). să se afle  $m(\angle MOQ)$ .
- ⑨2p 3). Fie dreptele  $AB$  și  $CD$  concurente în punctul  $O$ ,  $E$  un punct ce nu aparține nici unei drepte. Distanța de la  $E$  la  $AB$  este  $EO$ . Dacă  $m(\angle BOD) = 25^\circ$ , să se afle  $m(\angle COE)$ .
- ⑩1p 4). Fie  $\triangle ABC$  isoscel  $[AB] = [AC]$ ,  $BE \perp AC$ ,  $E \in (AC)$ ,  $CF \perp AB$ ,  $F \in (AB)$ .
- a). Să se demonstreze că  $\triangle AEB \cong \triangle AFC$ .
- b). Să se arate că  $(AO)$  este bisectoarea  $\angle BAC$ ,  $\{O\} = BE \cap FC$ .



- 1). Care literă urmează în mod logic : T, Q, N, K, H, ...
- 2). Un comerciant cumpără cafea în valoare de 1200 RON și apoi o vinde cu 1500 RON. Pentru fiecare pungă de cafea vândută are un profit de 50 RON. Câte pungi a vândut comerciantul ?
- 3). Pe un cerc sunt 4 mărgelile aflate la distanțe egale. De câte linii drepte este nevoie pentru a uni toate mărgelile între ele ?
- 4). Cât reprezintă  $1/10$  din  $1/4$  din  $1/5$  din  $1/2$  din 1200 ?
- 5). Dacă a doua zi a lunii este Luni, se poate ca a douăzecea zi a lunii să fie Vineri ?  
geometrie sfarsit pitagora
- 6). „Mâna“ este pentru „mănușă“ la fel cum este „cap“ pentru : păr, căciulă, gât, cercei.
- 7). O treime din băț e în pământ, jumătate în apă și deasupra apei mai rămân 1,5 m. Care este lungimea bățului ?
- 8). O găleată plină cu apă cântărește 5 kg, iar când găleata este plină pe jumătate cântărește 3,25 kg. Câți litri de apă încap în găleată ?

## Capitolul XII PARALELISM Drepte paralele



### NOTIUNI DE BAZĂ

- două drepte distincte  $a$  și  $b$ , conținute în același plan care nu au nici un punct comun se numesc drepte paralele.
- dacă două drepte formează cu o secantă o pereche de unghiuri alterne interne congruente atunci dreptele sunt paralele și reciproc.
- notație :  $a \parallel b$ .

### PROBLEME

\*

- 1). În figura 51 se știe că  $a \parallel b$ . Aflați unghiurile.

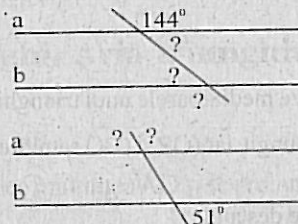
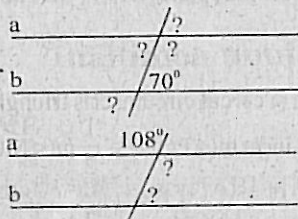


Fig. 51

\*\*

- 2). În care din desenele conținute în figura 52 dreptele  $a$  și  $b$  sunt paralele ?

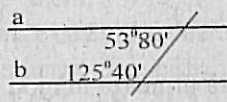
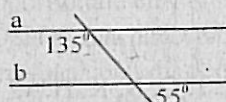
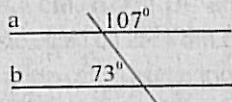
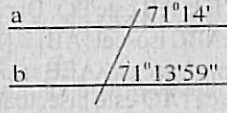
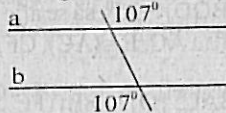
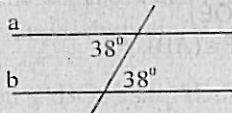


Fig. 52

- 3). În figura 53 se știe că dreptele  $a$  și  $b$  sunt paralele și unghiul este de 5 ori mai mare decât  $\angle 1$ . Să se afle celelalte unghiuri.
- 4). În figura 53 se știe că dreptele  $a$  și  $b$  sunt paralele și unghiurile  $\angle 5$  și  $\angle 8$  sunt direct proporționale cu numerele 2 și 3. Să se afle toate unghiurile care s-au format.
- 5). Să se afle unghiurile din figura 54 a). și b).

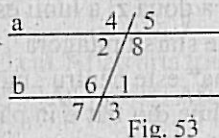
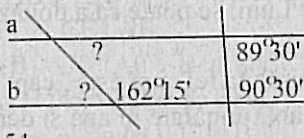
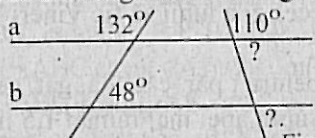


Fig. 54

Fig. 53

- 6). În figura 55 ( $AD$  și  $BC$  bisectoare și  $a \parallel b$ ). Dacă  $m(\angle BAD) = 25^\circ$  să se afle  $m(\angle EAB)$ ,  $m(\angle ABC)$  și  $m(\angle ABF)$ .

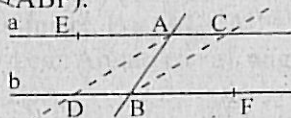


Fig. 55

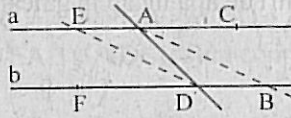
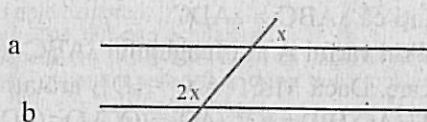
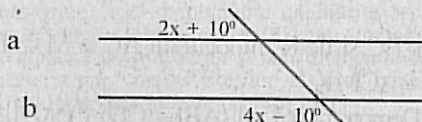
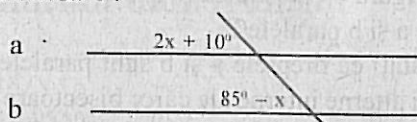
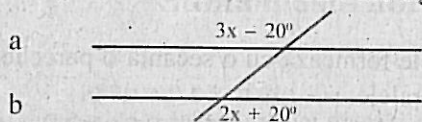


Fig. 56

7). În figura 56 se știe că  $m(\angle CAB) = 38^\circ$ ,  $(AB \parallel DE)$  și  $(DE \text{ bisectoare})$  și  $m(\angle ADF) = 76^\circ$ . Cum sunt dreptele  $a$  și  $b$ ?

8). Aflați  $x$ , dacă  $a \parallel b$ , în fiecare din figurile următoare :



9). În fig.57  $M \in (AC)$ ,  $N \in (BC)$ ,  $MN \parallel AB$ . Dacă  $m(\angle AMN) = 100^\circ$  și  $m(\angle MNC) = 45^\circ$  aflați  $m(\angle CAB)$  și  $m(\angle CBA)$ .

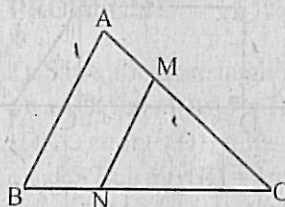


Fig. 57

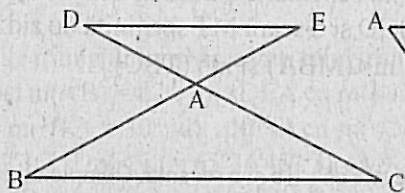


Fig. 58

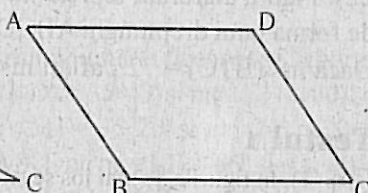


Fig. 59

10). În fig.58 se știe că  $DE \parallel BC$ , și  $m(\angle ABC) = 53^\circ$ ,  $m(\angle ACB) = 28^\circ$ . Aflați  $m(\angle ADE)$  și  $m(\angle AED)$ .

11). În fig.59 se știe că  $AD \parallel BC$  și  $AB \parallel DC$ . Dacă  $m(\angle DAB) = 64^\circ$  calculează  $m(\angle B)$ ,  $m(\angle C)$  și  $m(\angle D)$ .

12). În fig.60 știm  $DC \parallel AB$ . Dacă  $m(\angle DAB) = 71^\circ$  și  $m(\angle CBA) = 48^\circ$  aflați  $m(\angle ADC)$  și  $m(\angle BCD)$ .

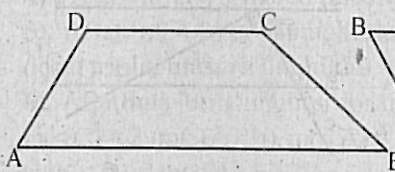


Fig. 60

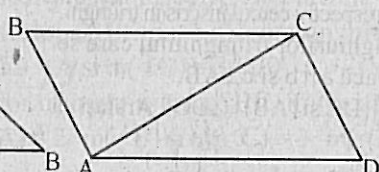


Fig. 61

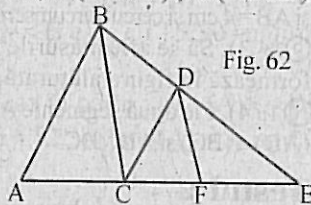


Fig. 62

13). În fig.61  $AB \parallel DC$  și  $BC \parallel AD$ . Știind că  $m(\angle BAC) = 32^\circ$  și  $m(\angle BCA) = 45^\circ$ , să se afle  $m(\angle DAC)$  și  $m(\angle DCA)$ .

14). În  $\triangle ABE$ ,  $BC$  este bisectoarea  $\angle ABE$ ,  $C \in (AE)$ ,  $DC \parallel AB$ ,  $D \in (BE)$ ,  $DF \parallel BC$ ,  $F \in (AE)$ . Știind că  $m(\angle ABE) = 80^\circ$  și  $m(\angle BAE) = 75^\circ$  să se afle : a).  $m(\angle BCD)$ ,  $m(\angle DCF)$ ,  $m(\angle CDF)$ ,  $m(\angle FDE)$ ; b). ce este  $DF$  pentru  $\angle CDE$ ? (Fig. 62).

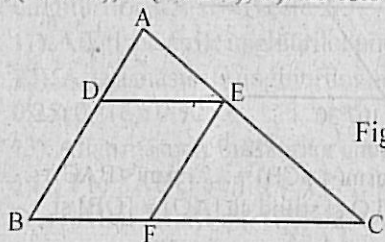


Fig. 63

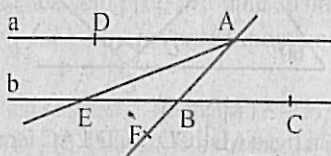


Fig. 64



15). Fie  $\triangle ABC$  cu  $m(\angle ABC) = 60^\circ$ . Se construiesc  $DE \parallel BC$ ,  $D \in (AB)$ ,  $E \in (AC)$ ,  $EF \parallel AB$ ,  $F \in (BC)$ . Să se afle unghiurile  $\angle ADE$ ,  $\angle BDE$ ,  $\angle DEF$ ,  $\angle EFB$ ,  $\angle EFC$ . (Fig. 63).

16). În figura 64 se ştie că  $m(\angle CBF) = 159^\circ$ ,  $m(\angle EAB) = 10^\circ 30'$  şi  $(AE)$  bisectoare. Sunt dreptele  $a$  şi  $b$  paralele?

17). Arătaţi că dreptele  $a$  şi  $b$  sunt paralele dacă ele formează cu o secantă o pereche de unghiuri alterne interne ale căror bisectoare sunt paralele.

18). Prin vârfurile  $A$  şi  $C$  ale triunghiului  $\triangle ABC$  se duc paralele  $AD \parallel BC$  şi  $DC \parallel AB$ . Arătaţi că  $\triangle ABC \equiv \triangle ADC$ .

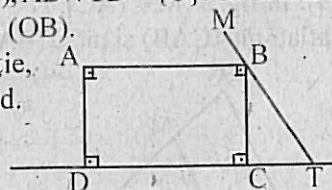
19). Prin vârful  $A$  al triunghiului  $\triangle ABC$  se duce  $AX \parallel BC$  şi fie  $K$  mijlocul lui  $AC$  şi  $M \in (BC)$  oarecare. Dacă  $MK \cap AX = \{D\}$ , arătaţi că  $\triangle ADK \equiv \triangle CMK$ .

20). Fie  $AC \cap BD = \{O\}$ ,  $(AO) \equiv (OC)$ ,  $O \in (BD)$ ,  $AB \parallel CD$ . Demonstraţi că: a).  $(AB) \equiv (CD)$ ; b).  $AD \parallel BC$ .

21). Prin capetele segmentului  $(AB)$  se duc  $AD \parallel BC$ ,  $(AD) \equiv (BC)$ ,  $AB \cap CD = \{O\}$ . Să se arate că: a). bisectoarele  $\angle OBC$  şi  $\angle OAD$  sunt paralele; b).  $(AO) \equiv (OB)$ .

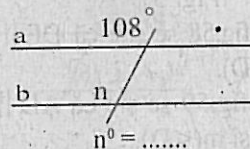
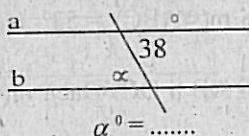
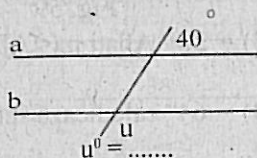
22). Figura alăturată reprezintă schematic o casă în construcţie, de forma unui dreptunghi  $ABCD$  şi o scară  $MT$  sprijinită de zid.

Dacă  $m\angle(BTC) = 72^\circ$ , aflaţi  $m\angle(MBA)$  şi  $m\angle(TBC)$ .



## Testul 1

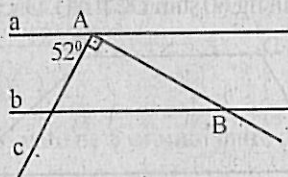
⑤4p 1). În figurile de mai jos se ştie că  $a \parallel b$  şi  $c$  secantă. Completaţi:



⑦2p 2). Să se construiască  $\triangle ABC$  cu  $m(\angle A) = 90^\circ$ ,  $m(\angle C) = 30^\circ$  şi  $AB = 4$  cm şi cercul circumscris, respectiv cercul înscris în triunghi.

⑨2p 3). Să se afle măsurile unghiurilor triunghiului care se formează în figura alăturată, dacă  $a \parallel b$  şi  $c \perp AB$ .

⑩1p 4). Fie două segmente  $AB \parallel DC$  şi  $(AB) \equiv (DC)$ . Arătaţi că  $(AD) \equiv (BC)$  şi  $AD \parallel BC$ .



## Testul 2

⑤4p 1). Considerând dreptele paralele  $a$  şi  $b$  care sunt tăiate de o secantă  $c$  şi numerotând unghiurile care se formează cu cifre de la 1 la 8, scrieţi toate perechile de unghiuri alterne interne, alterne externe şi corespondente.

⑦2p 2). Stabiliţi dacă în fig. b dreptele  $a$  şi  $b$  sunt paralele. (Justificaţi răspunsul).

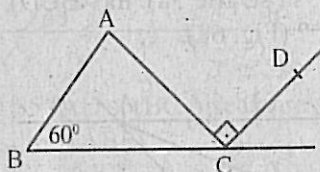


Fig. a

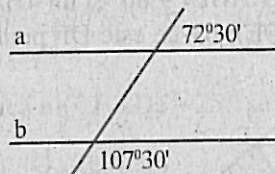


Fig. b

⑨2p 3). Dacă în fig. a  $AB \parallel CD$  şi  $CD \perp AC$  iar  $m(\angle B) = 60^\circ$  atunci  $m(\angle ACB) = \dots$  şi  $m(\angle BAC) = \dots$

⑩1p 4). Fiind date dreptele  $AB$  şi  $CD$  concurente în punctul  $O$  şi ştiind că  $[AO] \equiv [OB]$  şi  $AD \parallel BC$ , să se arate că  $AC \parallel DB$ .

# Capitolul XIII

## PROPRIETĂȚILE TRIUNGHIULUI

### Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi



#### NOTIUNI DE BAZĂ

- suma măsurilor unghiurilor unui triunghi este egală cu  $180^\circ$
- într-un triunghi echilateral măsura unui unghi este  $60^\circ$
- într-un triunghi dreptunghic unghiurile ascuțite sunt complementare
- un triunghi isoscel în care măsura unuia dintre unghiuri este  $60^\circ$  este echilateral
- se numește unghi exterior al unui triunghi un unghi care este adiacent și suplementar cu un unghi al triunghiului
- măsura unui unghi exterior al unui triunghi este egală cu suma măsurilor celor două unghiuri ale triunghiului neadiacente cu el
- bisectoarea unui unghi exterior al unui triunghi se numește bisectoare exterioară a triunghiului corespunzătoare unghiului respectiv
- bisectoarea exterioară și interioară a aceluiași unghi sunt perpendiculare.

#### PROBLEME

\*

- 1). Să se afle toate unghiurile triunghiului și precizați felul triunghiului în fiecare caz în parte :  
 a).  $\triangle ABC$  cu  $m(\sphericalangle A) = 38^\circ$  și  $m(\sphericalangle B) = 87^\circ$ ; b).  $\triangle DEA$  cu  $m(\sphericalangle D) = 35^\circ 43'$  și  $m(\sphericalangle E) = 100^\circ$ ; c).  $\triangle DKL$  cu  $m(\sphericalangle D) = 30^\circ$  și  $m(\sphericalangle K) = 30^\circ$ ; d).  $\triangle MNP$  cu  $m(\sphericalangle M) = 35^\circ 20'$  și  $m(\sphericalangle N) = 70^\circ 15'$   
 e).  $\triangle RST$  cu  $m(\sphericalangle R) = 45^\circ 12' 36''$  și  $m(\sphericalangle T) = 65^\circ 36' 45''$ ; f).  $\triangle MKF$  cu  $m(\sphericalangle M) = 66^\circ$  și  $\sphericalangle K \equiv \sphericalangle F$ ;  
 g).  $\triangle AOB$  cu  $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle O \equiv \sphericalangle B$ ; h).  $\triangle EFG$  cu  $m(\sphericalangle E) = 27^\circ$  și  $m(\sphericalangle F) = 63^\circ$ .

2). Aflați unghiurile necunoscute din triunghiurile dreptunghice următoare :

- a).  $\triangle PQR$  cu  $m(\sphericalangle P) = 30^\circ$ ; b).  $\triangle FGH$  cu  $m(\sphericalangle F) = 35^\circ 29'$ ; c.).  $\triangle ABC$  cu  $[AB] \equiv [AC]$ .

3). Aflați  $m(\sphericalangle C)$  al triunghiului  $\triangle ABC$  dacă măsura  $\sphericalangle B$  este cu  $20^\circ$  mai mare decât dublul măsurii unghiului  $\sphericalangle A$  și  $m(\sphericalangle A) = 45^\circ$ .

\*\*

4). Aflați  $m(\sphericalangle B)$  și  $m(\sphericalangle C)$  ale triunghiului  $\triangle ABC$  care are  $m(\sphericalangle A) = 84^\circ$  și  $m(\sphericalangle B) = 2 \cdot m(\sphericalangle C)$ .

5). Aflați  $m(\sphericalangle A)$  al triunghiului  $\triangle ABC$  dacă măsura unghiului  $\sphericalangle B$  este cu  $15^\circ 30'$  mai mic decât triplul măsurii unghiului  $\sphericalangle A$  și  $m(\sphericalangle C) = 35^\circ 30'$ .

6). Aflați măsurile unghiurilor triunghiurilor  $\triangle ABC$ , în fiecare caz în parte : a).  $\sphericalangle A \equiv \sphericalangle B$  și  $m(\sphericalangle C) = 2 \cdot m(\sphericalangle A)$ ; b).  $m(\sphericalangle A) = 2 \cdot m(\sphericalangle B)$  și  $m(\sphericalangle C) = 3 \cdot m(\sphericalangle B) + 12^\circ$ ; c).  $m(\sphericalangle A) = 3 \cdot m(\sphericalangle C)$  și  $m(\sphericalangle B) = m(\sphericalangle A) + 12^\circ$ .

7). Aflați măsurile unghiurilor triunghiurilor și precizați ce fel de triunghiuri sunt : a).  $\triangle AOP$  cu  $[AO] \equiv [OP]$  și  $m(\sphericalangle O) = 60^\circ$ ; b).  $\triangle MPR$  cu  $[MP] \equiv [MR]$  și  $m(\sphericalangle R) = 59^\circ 60'$ .

8). Aflați  $m(\sphericalangle A)$  și  $m(\sphericalangle B)$  ale triunghiului  $\triangle ABC$ , dacă  $m(\sphericalangle C) = 90^\circ$  și  $m(\sphericalangle A) = 2 \cdot m(\sphericalangle B)$ .

9). Aflați  $m(\sphericalangle B)$  și  $m(\sphericalangle C)$  ale triunghiului  $\triangle ABC$ , dacă  $m(\sphericalangle A) = 120^\circ$  și  $m(\sphericalangle B) = 3 \cdot m(\sphericalangle C)$ .

10). Aflați  $m(\sphericalangle A)$  și  $m(\sphericalangle B)$  ale triunghiului  $\triangle ABC$ , dacă  $m(\sphericalangle C) = 40^\circ$  și raportul măsurilor unghiurilor  $\sphericalangle A$  și  $\sphericalangle B$  este  $2/3$ .

11). Aflați măsurile unghiurilor unui triunghi  $\triangle ABC$  dacă sunt proporționale cu numerele 5, 6, și 7.

12). Aflați măsurile unghiurilor unui triunghi  $\triangle EFG$  dacă sunt invers proporționale cu numerele 0,25; 0,1(6); 0,125.

13). Aflați măsurile unghiurilor unui triunghi  $\triangle FLM$  dacă se știe că :  $4/5 m(\sphericalangle F) = 4/3 m(\sphericalangle L) = m(\sphericalangle M)$ .

14). Fie  $\triangle ABC$  cu  $m(\sphericalangle A) = 30^\circ$  și  $m(\sphericalangle B) = 68^\circ$ . (CD este bisectoarea unghiului  $\sphericalangle C$ ,  $D \in AB$ ). Aflați  $m(\sphericalangle C)$ ,  $m(\sphericalangle ACD)$ ,  $m(\sphericalangle ADC)$ ,  $m(\sphericalangle BDC)$ .

15). În  $\triangle ABC$  se ştie  $m(\angle A) = 40^\circ$  şi  $(BD \text{ este bisectoarea } \angle B, D \in (AC), m(\angle ABD) = 25^\circ$ . Aflaţi  $m(\angle B)$ ,  $m(\angle C)$ ,  $m(\angle ADB)$ .

16). În  $\triangle ACD$ ,  $(AB \text{ este bisectoarea unghiului } \angle A, B \in (CD), m(\angle BAC) = 20^\circ$  şi  $m(\angle D) = 50^\circ$ . Aflaţi  $m(\angle A)$ ,  $m(\angle C)$ ,  $m(\angle ABC)$ .

17). În  $\triangle ABE$ ,  $(AD \text{ este bisectoarea unghiului } \angle A, D \in (BE), m(\angle B) = 28^\circ$  şi  $m(\angle E) = 84^\circ$ . Aflaţi  $m(\angle A)$ ,  $m(\angle BAD)$ ,  $m(\angle BDA)$ .

18). În  $\triangle ABC$ ,  $AD$  este înălţime,  $D \in (BC)$ ,  $m(\angle B) = 60^\circ$  şi  $m(\angle C) = 70^\circ$ . Aflaţi  $m(\angle A)$ ,  $m(\angle BAD)$ ,  $m(\angle CAD)$ ,  $m(\angle BDA)$ .

19). În  $\triangle ABC$ ,  $BD$  este înălţime,  $D \in (AC)$ ,  $m(\angle A) = 53^\circ$  şi  $m(\angle DBC) = 23^\circ$ . Aflaţi  $m(\angle ABD)$ ,  $m(\angle C)$ ,  $m(\angle ADB)$ .

20). Aflaţi  $x$  din figurile 55 şi 56 :

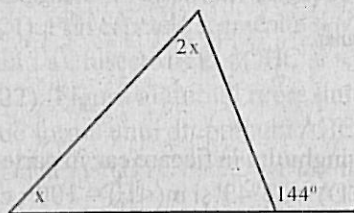


Fig. 55

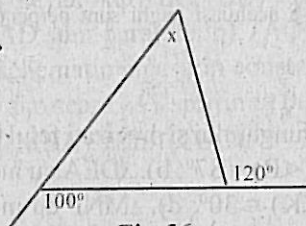


Fig. 56

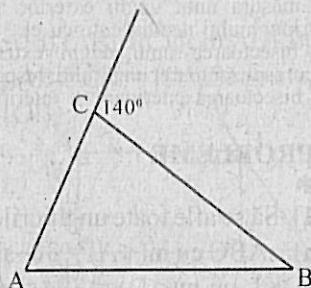


Fig. 57

21). În fig. 57 se ştie că  $m(\angle A) : m(\angle B) = 3 \text{ rest } 20$ . Ştiind că măsura unghiului exterior din  $C$  are  $140^\circ$ , să se afle măsurile unghiurilor triunghiului  $ABC$ .

22). În  $\triangle ABC$ ,  $BD$  şi  $CD$  sunt biseptoarele  $\angle ABC$  şi  $\angle ACB$ . Dacă  $m(\angle BDC) = 106^\circ$ , să se afle  $m(\angle A)$ .

23). În  $\triangle ABC$ ,  $BD$  este înălţime,  $D \in (AC)$ ,  $(AE \text{ este bisectoarea unghiului } \angle A, E \in (BC), BD \cap AE = \{O\}, m(\angle C) = 63^\circ$  şi  $m(\angle BAE) = 15^\circ$ . Aflaţi  $m(\angle AOB)$ ,  $m(\angle AOD)$ ,  $m(\angle BAC)$ ,  $m(\angle CBD)$ ,  $m(\angle AEB)$ .

24). În  $\triangle ABC$  dreptunghic cu  $m(\angle A) = 90^\circ$  şi  $m(\angle B) = 28^\circ$ , se duce înălţimea  $AD$  şi  $DE \parallel AC$ ,  $E \in (AB)$ . Aflaţi  $m(\angle C)$ ,  $m(\angle CAD)$ ,  $m(\angle BAD)$ ,  $m(\angle AED)$ ,  $m(\angle ADE)$ ,  $m(\angle BED)$ ,  $m(\angle BDE)$ .

25). În  $\triangle MNP$  se ştie că măsurile  $\angle N$  şi  $\angle P$  sunt invers proporţionale cu 1 şi 4 iar suma măsurilor lor este  $100^\circ$ . Fie  $(MB$  şi  $(NA$  biseptoarele unghiurilor  $\angle M$  respectiv  $\angle N$ ,  $B \in (NP)$ ,  $A \in (MP)$ . Aflaţi măsurile unghiurilor triunghiului  $\triangle NAB$ .

26). În triunghiul  $\triangle ABC$ ,  $m(\angle A) = 65^\circ$  şi  $m(\angle C) = 70^\circ$ , se duce  $AD \perp BC$ ,  $D \in (BC)$ . Să se arate că  $AB$  este paralela cu biseptoarea  $\angle ADC$ .

27). În triunghiul  $\triangle ABC$  obtuzunghic,  $m(\angle B) = 20^\circ$ ,  $AD \perp AB$ ,  $D \in (BC)$ . Dacă  $(DE \text{ este biseptoarea unghiului } \angle CDA, E \in (AC)$  şi  $m(\angle CAD) = 35^\circ$ . Arătaţi că  $DE \perp CA$ .

28). În  $\triangle ABC$ ,  $m(\angle A) = 60^\circ$  şi  $m(\angle B) = 40^\circ$ , se consideră  $D \in (AB)$  astfel încât  $m(\angle ACD) = 30^\circ$  şi  $E \in (BC)$  astfel încât  $m(\angle BED) = 80^\circ$ . Să se arate că  $DC \perp AB$  şi  $DE \parallel AC$ .

29). În  $\triangle ABC$   $m(\angle A) = 100^\circ$  şi  $m(\angle C) = 20^\circ$ ,  $(BE \text{ este biseptoarea unghiului } \angle B, E \in (AC)$ , se alege  $D \in (BC)$  astfel încât  $m(\angle DEB) = 30^\circ$ . Să se arate că  $DE \parallel AB$ .

30). Fie unghiul  $\angle XOY$  cu  $m(\angle XOY) = 90^\circ$ ,  $(OC \in \text{int}(\angle XOY))$  astfel încât  $m(\angle COY) = 60^\circ$ . Fie  $CB \perp OY$ ,  $B \in (OY)$  şi  $CA \perp OX$ ,  $A \in (OX)$ . Arătaţi că : a).  $\triangle COB \cong \triangle OCA$ ; b).  $CB \parallel AO$ ; c).  $CA \parallel OB$ .



## Mediana unui triunghi. Simetria față de o dreaptă

### PROBLEME

\*\*.

- 1). În triunghiul  $\triangle MKL$  isoscel,  $MK \equiv ML$ ,  $MD$  mediana,  $D \in (KL)$ . Dacă perimetrul este de 64 cm și  $DK = 10$  cm, să se afle laturile triunghiului.
- 2). În triunghiul  $\triangle DEF$  isoscel,  $DA$  și  $EB$  sunt mediane.  $A \in (EF)$  și  $B \in (DF)$ . Să se afle perimetrul triunghiului dacă  $AE = 5$  cm și  $BD = 6$  cm.
- 3). În triunghiul  $\triangle ABC$  echilateral,  $AM$  este mediana  $M \in (BC)$  și  $MB = 8$  cm. Să se afle perimetrul triunghiului.
- 4). Să se construiască triunghiul  $\triangle ABC$  știind că  $AB = 6$  cm,  $BC = 8$  cm și  $AM = 5$  cm unde  $AM$  este mediana,  $M \in BC$ .
- 5). Să se construiască triunghiul  $\triangle STU$  cu  $SP$  mediana dacă  $SP = 5$  cm,  $TP = 7$  cm și  $m(\angle SPT) = 60^\circ$ .
- 6). Să se construiască triunghiul  $\triangle DEF$  cu  $DB$  mediana dacă  $DE = 6$  cm,  $EB = 4$  cm iar  $m(\angle E) = 70^\circ$ .

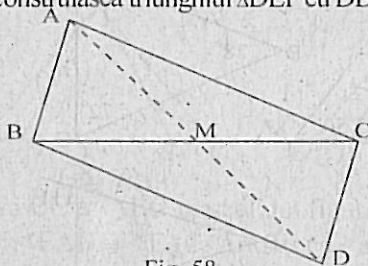


Fig. 58

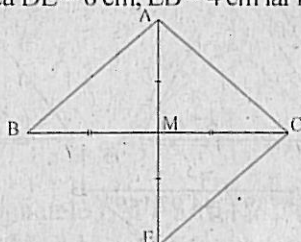


Fig. 59

- 7). În figura 59 :  $\triangle ABC$  isoscel,  $[AB] \equiv [AC]$ , se duce mediana  $AM$  și se prelungește cu  $[AM] \equiv [ME]$ . Să se arate că : a).  $\triangle ABM \equiv \triangle ECM$ ; b).  $\triangle ACE$  isoscel.
- 8). În  $\triangle ABC$  se duce mediana și se prelungește cu  $[MD] \equiv [AM]$ . Arătați că : a).  $AB \parallel DC$ ; b).  $BD \parallel AC$ .
- 9). În  $\triangle ABC$  se duce mediana  $BM$ ,  $M \in (AC)$ . Prelungirea medianei intersectează paralela prin  $A$  la  $BC$  în punctul  $D$ . Să se arate că : a).  $\triangle AMD \equiv \triangle CMB$ ; b).  $\triangle MDC \equiv \triangle MBA$ ; c).  $DC \parallel AB$ .
- 10). Fie  $\triangle ABC$  isoscel,  $[AB] \equiv [AC]$  și  $D$  simetricul lui  $A$  față de  $BC$ . Arătați că  $DB \parallel AC$  și  $DC \parallel AB$ .
- 11). În  $\triangle ABC$   $m(\angle B) = 40^\circ$  și  $m(\angle C) = 80^\circ$ , se duce  $(AE)$  bisectoarea unghiului  $\angle A$ ,  $E \in (BC)$ . Dacă  $D$  este simetricul lui  $E$  față de  $AC$ , aflați măsurile unghiurilor triunghiului  $\triangle AED$ .
- 12). Fie  $\angle XOY$  și  $A \in (OX)$  și  $B \in (OY)$  astfel încât  $[AO] \equiv [BO]$ . Să se arate că punctele  $A$  și  $B$  sunt simetrice față de bisectoarea unghiului.
- 13). În  $\triangle ABC$  din figura 58 se duce mediana  $AM$  și se prelungește cu  $[AM] \equiv [MD]$ . Arătați că : a).  $\triangle AMC \equiv \triangle DMB$ ; b).  $\triangle AMB \equiv \triangle DMC$ ; c).  $[AC] \equiv [BD]$ ; d).  $[DC] \equiv [AB]$ ; e).  $\triangle ABC \equiv \triangle DCB$ .

## Triunghiul isoscel



### NOTIUNI DE BAZĂ

-se numește triunghi isoscel triunghiul care are două laturi congruente.

- proprietățile triunghiului isoscel :

- a). dacă un triunghi este isoscel, atunci unghiurile opuse laturilor congruente, sunt congruente și reciproc.
- b). în orice triunghi isoscel, bisectoarea unghiului din vârf, mediana corespunzătoare bazei, înălțimea corespunzătoare bazei și mediatoarea bazei coincid.

### PROBLEME

\*

- 1). Triunghiul  $\triangle ABC$  are  $AB = 5$  cm,  $BC = 7$  cm și perimetrul 19 cm. Aflați lungimea laturii  $AC$  și stabiliți ce fel de triunghi este. Care este perechea de unghiuri congruente ?
- 2). Triunghiul  $\triangle ABC$  are  $AB = 5,5$  cm,  $BC = 4$  cm și perimetrul de 15 cm. Verificați dacă  $\triangle ABC$  are două unghiuri congruente. Care sunt acestea ?

\*\*\*

3). Calculați perimetrul  $\triangle ABC$ , în fiecare caz din figura 60.

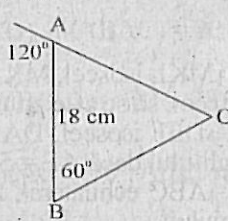
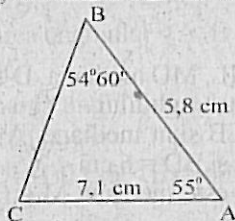
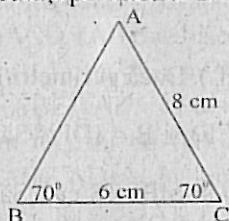


Fig. 60

4). Pe desenele din fig. 61, stabiliți care triunghiuri sînt isoscele și care laturi sunt congruente :

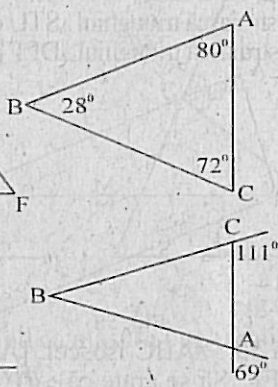
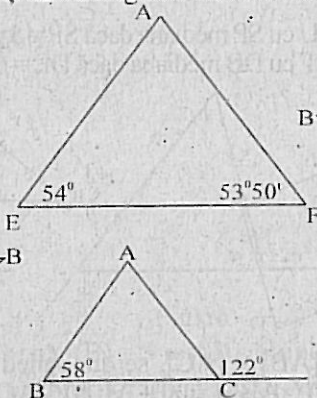
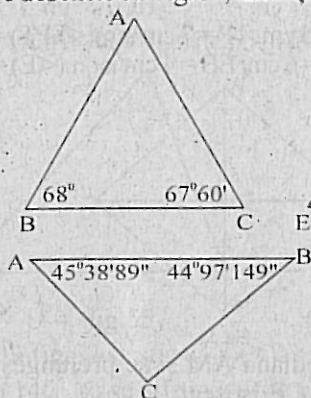


Fig. 61

5). Aflați  $m(\angle B)$  în  $\triangle ABC$  din figura 62 și respectiv din figura 63. a).

$P_{\triangle ABC} = 22\text{ cm}$ ,  $AC = 7\text{ cm}$ ,  $BC = 8\text{ cm}$ ; b).  $P_{\triangle ABC} = 32\text{ cm}$ ,  $AB = 14\text{ cm}$ ,  $BC = 9\text{ cm}$ .

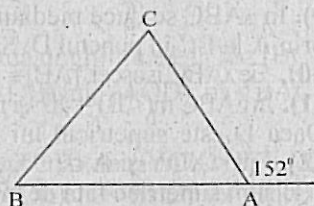
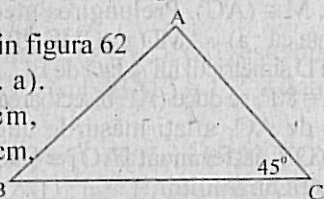


Fig. 62

Fig. 63

6). Știind că triunghiul  $\triangle ABC$  este isoscel,  $[AB] \equiv [AC]$ , să se afle din figurile 65, 66 și respectiv 67 : a).  $CD = ?$ ;  $m(\angle BDA) = ?$ ; b).  $m(\angle BAD) = ?$ ;  $m(\angle BDA) = ?$ ; c).  $BD = ?$ ;  $m(\angle BAD) = ?$ ;  $AC = ?$ ;  $P_{\triangle ABC} = ?$

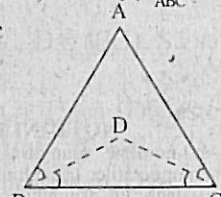
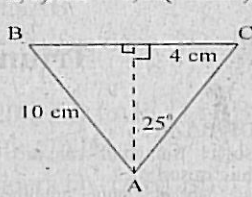
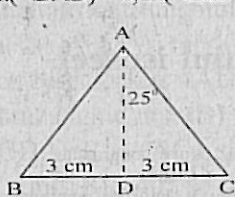
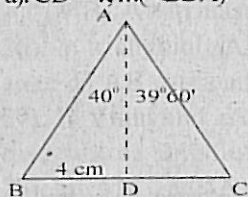


Fig. 65

Fig. 66

Fig. 67

Fig. 64

7). În exteriorul triunghiului isoscel  $\triangle ABC$  din figura 68,  $[AB] \equiv [AC]$  se aleg punctele E și F astfel încât  $[EB] \equiv [CF]$  și  $\angle EBC \equiv \angle FCB$ . Arătați că : a).  $\triangle ABE \equiv \triangle ACF$ ; b). natura  $\triangle AEF$ ?

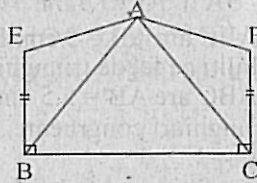
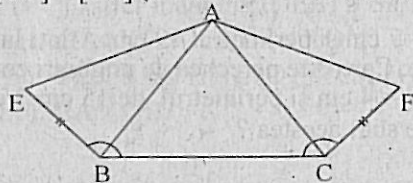


Fig. 68

Fig. 69

8). În  $\triangle ABC$  isoscel,  $(AB) \equiv (AC)$ , se duce bisectoarea  $BE$  a  $\angle ABC$ ,  $E \in (AC)$ . Dacă  $m(\angle AEB) = 75^\circ$ , să se afle unghiurile  $\triangle ABC$ .

9). În exteriorul  $\triangle ABC$  isoscel din figura 69,  $[AB] \equiv [AC]$ , se construiesc  $EB \perp BC$ ,  $FC \perp CB$  astfel încât  $[EB] \equiv [FC]$ . Arătați că : a).  $\triangle AEB \equiv \triangle AFC$ ; b).  $\triangle AEF$  isoscel.

10). În  $\triangle ABC$  isoscel din figura 64,  $[AB] \equiv [AC]$ , se duc bisectoarele ( $BD$  și  $CD$  ale unghiurilor  $\angle B$  respectiv  $\angle C$ , care se intersectează în  $\{D\}$ . Să se arate că : a).  $\triangle BDC$  isoscel; b).  $[BD] \equiv [DC]$ ; c).  $\triangle ABD \equiv \triangle ACD$ ; d). ( $AD$  bisectoarea unghiului  $\angle A$ ).

11). În exteriorul  $\triangle ABC$  isoscel,  $[AB] \equiv [AC]$ , se construiesc  $DB \perp BC$ ,  $EC \perp BC$ ,  $AD \perp AB$ ,  $AE \perp AC$ . Arătați că : a).  $\triangle ABD \equiv \triangle ACE$ ; b).  $[DB] \equiv [CE]$ ; c).  $\triangle ADE$  isoscel.

12). Pe baza  $BC$  a  $\triangle ABC$  isoscel din figura 70 se iau punctele  $D$  și  $E$  astfel încât  $[BD] \equiv [CE]$ . Să se arate că  $\triangle ADE$  este isoscel.

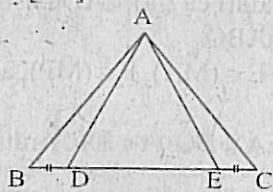


Fig. 70

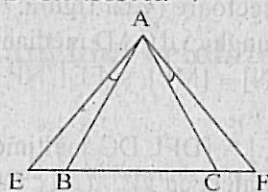


Fig. 71

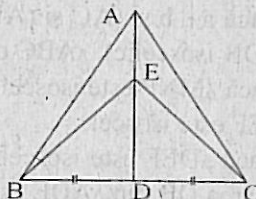


Fig. 72

13). Pe baza  $BC$  a  $\triangle ABC$  isoscel din figura 71 se iau punctele  $E$  și  $F$  astfel încât  $B \in (EC)$ ,  $C \in (BF)$  și  $\angle EAB \equiv \angle FAC$ . Arătați că : a).  $\triangle AEB \equiv \triangle AFC$ ; b).  $\triangle AEF$  isoscel.

14). Pe mediana  $AD$  a  $\triangle ABC$  isoscel din figura 72,  $[AB] \equiv [AC]$ ,  $D \in (BC)$  se alege un punct  $E$ . Arătați că : a).  $\triangle EDB \equiv \triangle EDC$ ; b).  $\angle ABE \equiv \angle ACE$ .

15). În  $\triangle ABC$  din figura 73 se duce înălțimea  $AD$ ,  $D \in (BC)$  care se prelungește cu segmentul  $[DM] \equiv [AD]$ . Să se arate că  $\triangle ACM$  este isoscel.

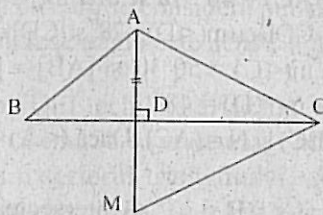


Fig. 73

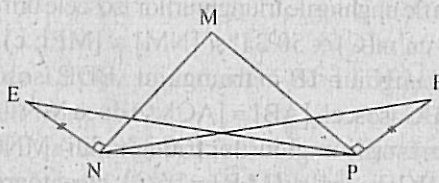


Fig. 74

16). În exteriorul  $\triangle MNP$  isoscel din figura 74,  $[MN] \equiv [MP]$ , se construiesc  $EN \perp MN$ ,  $PF \perp MP$ ,  $[EN] \equiv [PF]$ . Să se arate că  $[EP] \equiv [NF]$ .

17). Se consideră  $M$  și  $N$  mijloacele laturilor  $[AB] \equiv [AC]$  ale triunghiului  $\triangle ABC$  isoscel. Să se arate că :  $[MC] \equiv [NB]$ .

18). Demonstrați că bisectoarele unghiurilor de la baza unui triunghi isoscel sunt congruente.

19). Pe înălțimea  $AE$  a  $\triangle ABC$  isoscel,  $[AB] \equiv [AC]$ ,  $E \in (BC)$ , se consideră un punct  $M$ . Arătați că : a).  $\angle ABM \equiv \angle ACM$ ; b).  $\angle MBC \equiv \angle MCB$ .

20). În  $\triangle ABC$  isoscel,  $AB \equiv AC$ ,  $AD \perp BC$  este înălțime,  $D \in BC$ . Să se afle : a). aria triunghiului dacă se știu  $BD = 2$  cm și  $AD = 5$  cm; b). lungimea lui  $DC$  dacă înălțimea  $AD$  este de 6 cm și aria triunghiului este de 48 cm<sup>2</sup>.

21). În triunghiul  $\triangle ABC$  isoscel,  $AB \equiv AC$ , se cunoaște aria de 60 cm<sup>2</sup>. Să se afle lungimea înălțimii  $AD \perp BC$ ,  $D \in BC$ , dacă  $DC = 3$  cm.



22). Dacă  $a \parallel b$  și (BF bisectoare, să se arate că  $\triangle AFB$  isoscel (vezi figura 75).

23). În figura 76 :  $a \parallel b$  și (AD și (BC bisectoare. Să se arate că  $AD \perp BC$  și  $[BD] \equiv [DC]$ .

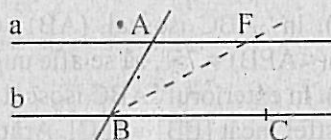


Fig. 75

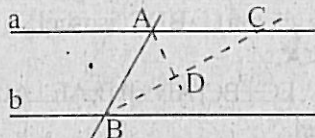


Fig. 76

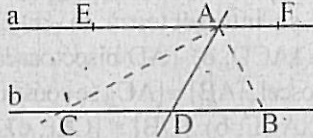


Fig. 77

24). Dacă  $a \parallel b$  și (AC și (AB bisectoare (vezi figura 77), arătați că : a).  $\triangle ADC$  isoscel; b).  $\triangle ADB$  isoscel; c).  $\triangle ABC$  dreptunghic; d). AD mediana în  $\triangle ABC$ .

25). Dacă  $\triangle MNP$  este isoscel,  $[MN] \equiv [MP]$ , și  $EF \parallel NP$  unde  $E \in (MN)$ ,  $F \in (MP)$ , arătați că  $\triangle MEF$  este isoscel.

26). Dacă  $\triangle DEF$  este isoscel,  $[DE] \equiv [DF]$ , DC înălțime și  $EA \parallel DC$ ,  $A \in DF$ . Arătați că bisectoarea DB din  $\triangle ADE$  este paralela cu FE.

27). Fie  $\triangle GBC$  oarecare, (CD bisectoarea unghiului  $\angle C$ ,  $D \in (GB)$ . În exteriorul triunghiului se construiește  $GE \parallel CD$ ,  $E \in BC$ . Arătați că  $\triangle GCE$  este isoscel.

28). Fie  $\triangle ABC$  isoscel,  $[AB] \equiv [AC]$ , și se construiește semidreapta (BO astfel încât (BC să fie bisectoarea unghiului  $\angle ABO$ . Arătați că  $AC \parallel BO$ .

29). Se dau dreptele AD și BE concurente în punctul C astfel încât  $\triangle ABC$  și  $\triangle CDE$  sunt isoscele  $[AB] \equiv [AC]$ ,  $[DC] \equiv [DE]$ . Dacă AM și DN sunt înălțimi  $M \in (BC)$  și  $N \in (CE)$  Arătați că : a). MN reprezintă 50% din BE; b). dacă  $m(\angle BAC) = 40^\circ$  să se afle  $m(\angle NDE)$ .

30). Să se afle unghiurile triunghiurilor isoscele următoare : a).  $\triangle CDE$  cu  $m(\angle D) = 78^\circ$  și  $[CD] \equiv [DE]$ ; b).  $\triangle MNP$  cu  $m(\angle C) = 50^\circ 31'$  și  $[NM] \equiv [MP]$ ; c).  $\triangle ABC$  cu  $m(\angle C) = 50^\circ 30'$  și  $[AB] \equiv [AC]$ .

31). Aflați unghiul  $\angle B$  în triunghiul  $\triangle BDE$  isoscel care are  $m(\angle D) = 48^\circ$ .

32). În  $\triangle ABC$  isoscel,  $[AB] \equiv [AC]$ , se duce  $MN \parallel AB$ ,  $M \in (BC)$  și  $N \in (AC)$ . Dacă  $(\angle A) = 70^\circ$ , să se afle măsurile unghiurilor triunghiului  $\triangle MNC$ .

33). În  $\triangle ABC$  isoscel cu  $[AB] \equiv [AC]$ , bisectoarele unghiurilor  $\angle B$  și  $\angle C$  se intersectează în E. Aflați  $m(\angle BEC)$  în fiecare caz : a).  $m(\angle A) = 34^\circ$ ; b).  $m(\angle C) = 50^\circ$ .

34). În  $\triangle ABC$  isoscel cu  $[AB] \equiv [AC]$ ,  $m(\angle A) = 36^\circ$  (BE este bisectoarea unghiului  $\angle B$ ,  $E \in (AC)$ . Ce fel de triunghi este  $\triangle BEC$ ? Dar  $\triangle BEA$ ? Dacă  $FA \perp AB$ ,  $F \in BE$ , ce fel de triunghi este  $\triangle AEF$ ?

35). OA și OB sunt raze într-un cerc. Dacă  $m(\angle AOB) = 80^\circ$  să se afle  $m(\angle OAB)$ .

36). În  $\triangle ABC$  cu  $m(\angle A) = 90^\circ$  și  $m(\angle B) = 60^\circ$  se consideră  $D \in (BC)$  astfel încât  $[AB] \equiv [AD]$ . Aflați măsurile unghiurilor  $\triangle ABD$  și  $\triangle ADC$ .

37). În  $\triangle ABC$  isoscel  $[AB] \equiv [AC]$ ,  $m(\angle A) = 20^\circ$ ,  $MN \parallel AC$ ,  $M \in (AB)$ ,  $N \in (BC)$ . NP bisectoare a unghiului  $\angle MNB$ ,  $P \in (AB)$ , intersectează prelungirea lui AC în O. Aflați măsurile unghiurilor triunghiului  $\triangle NCO$ .

38). În triunghiul  $\triangle ABC$  isoscel  $[AB] \equiv [AC]$ ,  $m(\angle A) = 20^\circ$ , prin mijlocul D al laturii BC se duce perpendiculara DP pe AC,  $P \in (AC)$ . Dacă  $DP \cap AB = \{E\}$ , să se afle măsurile unghiurilor triunghiului  $\triangle BED$ .

39). În triunghiul  $\triangle ABC$  isoscel  $[AB] \equiv [AC]$ ,  $m(\angle A) = 40^\circ$ ,  $BD \perp AC$  cu  $D \in (AC)$  și (CE bisectoarea unghiului  $\angle C$ ,  $E \in (AB)$ . Dacă  $CE \cap BD = \{F\}$ , să se afle măsurile unghiurilor triunghiului  $\triangle BFC$ .

40). Fie triunghiul  $\triangle ABC$  cu  $[AB] \equiv [AC]$ . Mediatoarea laturii  $AB$  formează cu bisectoarea  $\sphericalangle A$  unghi de măsură  $50^\circ$ . Să se afle măsurile unghiurilor triunghiului  $\triangle ABC$ .

41). În triunghiul  $\triangle ABC$ ,  $m(\sphericalangle C) = 30^\circ$ , ( $AD$  este bisectoarea unghiului  $\sphericalangle A$ ,  $D \in (BC)$ ). Prin  $D$  se duce  $DE \parallel AB$ ,  $E \in (AC)$ . Știind că  $m(\sphericalangle DAE) = 40^\circ$  să se afle : a).  $m(\sphericalangle DEC)$ ;  $m(\sphericalangle ABD)$ ; b). măsura unghiului format de înălțimea  $AF$ ,  $F \in (BC)$  cu dreapta  $DE$ .

42). În  $\triangle ABC$   $m(\sphericalangle A) = 90^\circ$  și  $m(\sphericalangle C) = 30^\circ$ , se duc ( $BD$  bisectoarea unghiului  $\sphericalangle B$ ,  $D \in (AC)$ , ( $DE$  bisectoarea unghiului  $\sphericalangle BDC$ ,  $E \in (BC)$ ). Să se arate că  $DE \perp BC$ .

43). Demonstrați că triunghiul care are două înălțimi congruente este isoscel.

44). Demonstrați că în orice triunghi isoscel, înălțimile corespunzătoare laturilor congruente sunt congruente.

## Triunghiul echilateral



### NOȚIUNI DE BAZĂ

- se numește triunghi echilateral triunghiul care are toate laturile congruente.
- proprietățile triunghiului echilateral : a). unghiurile unui triunghi echilateral sunt congruente.  
b). triunghiul cu toate unghiurile congruente este echilateral  
c). în orice triunghi echilateral biseectoarele unghiurilor coincid cu medianele, mediatoarele și înălțimile triunghiului.

### PROBLEME

\*

- 1). În  $\triangle MBC$  echilateral,  $MD$  bisectoare,  $D \in (BC)$  și  $DC = 4$  cm. Aflați perimetrul  $\triangle MBC$ .
- 2). În  $\triangle MBC$  echilateral,  $MD$  înălțime,  $D \in (BC)$  astfel încât  $DC = 5,5$  cm. Aflați perimetrul  $\triangle MBC$ .
- 3). Pe un cerc se consideră punctele  $B$  și  $C$  astfel încât  $BC$  este congruent cu raza cercului. Ce fel de triunghi este  $\triangle OBC$  ?

\*\*

- 4). În  $\triangle DEF$  echilateral având perimetrul de 18 cm, se consideră  $M \in (DE)$  astfel încât  $ME = 3$  cm. Să se arate că :  $FM \perp DE$  și  $\sphericalangle DFM \equiv \sphericalangle EFM$ .
- 5). În exteriorul triunghiului  $\triangle ABC$  isoscel,  $[AB] \equiv [AC]$ , se construiesc triunghiurile echilaterale  $\triangle ADC$  și  $\triangle ABE$ . Demonstrați că : a).  $\triangle AEC \equiv \triangle ADB$ ; b).  $\triangle BEC \equiv \triangle CDB$ .
- 6). În figura 70 triunghiul  $\triangle ABC$  este echilateral și  $\triangle ADC \equiv \triangle CFB \equiv \triangle BEA$  sunt isoscele. Arătați că  $\triangle EFD$  este echilateral.
- 7). În figura 71 triunghiul  $\triangle ABC$  este echilateral și  $AA' \perp AB$ ,  $BB' \perp BC$  și  $CC' \perp AC$ . Știind că  $AA' \equiv BB' \equiv CC'$ , să se arate că  $\triangle A'B'C'$  este echilateral.

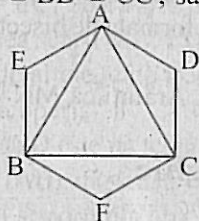


Fig. 70

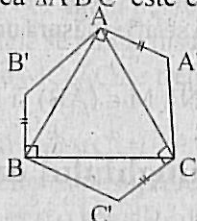


Fig. 71

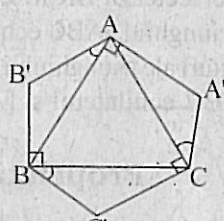


Fig. 72

- 8). În figura 72 triunghiul  $\triangle ABC$  este echilateral și  $AA' \perp AB$ ,  $BB' \perp BC$  și  $CC' \perp AC$ . Știind că  $\sphericalangle ACA' \equiv \sphericalangle CBC' \equiv \sphericalangle B'AB$ , să se arate că  $\triangle A'B'C'$  este echilateral.

- 9). Fie triunghiul  $\triangle BCD$  echilateral cu (BM bisectoare și P mijlocul laturii BD. Să se arate că triunghiul  $\triangle MPD$  este echilateral.
- 10). Fie triunghiul  $\triangle BCD$  echilateral și DM, BN, CP bisectoare care se intersectează în punctul O. Să se arate că  $OM \equiv ON \equiv OP$ .
- 11). Fie triunghiul  $\triangle ABC$  echilateral și AM, BN, CP mediane care se intersectează în punctul O. Arătați că triunghiul  $\triangle MNP$  este echilateral.
- 12). În triunghiul  $\triangle DEF$  echilateral, DM, EC sunt înălțimi care se intersectează în punctul O. Să se arate că (OF este bisectoarea  $\angle DFE$ .
- 13). Fie  $\triangle ABC$  echilateral și D simetricul lui A față de BC și (BM bisectoarea unghiului  $\angle B$ ,  $M \in (AC)$ . Arătați că : a).  $AC \parallel BD$ ; b).  $\triangle BOD$  este dreptunghic, unde  $BM \cap AD = \{O\}$ .
- 14). Fie  $\triangle ABC$  echilateral se consideră (AD bisectoarea unghiului  $\angle A$ ,  $D \in (BC)$ . Din D se duce paralela la AB care intersectează AC în E. Să se demonstreze că E este mijlocul laturii AC.
- 15). În triunghiul  $\triangle ABC$  echilateral, bisectoarele unghiurilor  $\angle A$  și  $\angle B$  se intersectează în E și  $DA \perp AB$  unde  $D \in BE$ . Ce fel de triunghi este  $\triangle AED$  ?
- 16). În triunghiul  $\triangle ABC$ ,  $[AB] \equiv [AC]$ ,  $m(\angle C) = 75^\circ$ , se construiește D simetricul lui B față de AC. Arătați că triunghiul  $\triangle ABD$  este echilateral.
- 17). În  $\triangle ABC$   $m(\angle A) = 90^\circ$ ,  $m(\angle B) = 30^\circ$ , D simetricul lui C față de AB. Arătați că triunghiul  $\triangle BCD$  este echilateral.
- 18). Fie unghiul  $\angle XOY$  cu  $m(\angle XOY) = 60^\circ$  și  $A \in (OX)$ , B simetricul lui A față de bisectoarea unghiului  $\angle XOY$ . Arătați că  $\triangle AOB$  este echilateral.
- 19). Fie triunghiul  $\triangle ABC$  isoscel,  $m(\angle A) = m(\angle B) = 30^\circ$  și D simetricul lui B față de AC. Să se arate că  $\triangle ABD$  este echilateral.
- 20). Fie punctul B aparținând bisectoarei triunghiului XOY, E și C simetricele lui B față de (OX și (OY. Dacă  $m(\angle XOY) = 30^\circ$  ce fel de triunghi este  $\triangle EOC$  ?
- 21). În  $\triangle ABC$ , D este mijlocul lui BC și E este simetricul lui D față de AC și F simetricul lui C față de AB. Arătați că  $\triangle AFB$  și  $\triangle ADE$  sunt echilaterale.
- 22). Fie  $\triangle ABC$  echilateral cu AM mediana,  $M \in (BC)$ , BP înălțimea,  $P \in (AC)$ ,  $AM \cap BP = \{O\}$ . Arătați că  $\triangle POC \equiv \triangle MOC$ .
- 23). În triunghiul  $\triangle ABC$  echilateral, (AP și (BR sunt bisectoare  $P \in (BC)$  și  $R \in (AC)$ . Se construiește perpendiculara în A pe AP care intersectează prelungirea lui BR în D. Arătați că D este simetricul lui B față de AC.
- 24). În triunghiul  $\triangle ABC$  echilateral, BR și CP sunt mediane,  $R \in (AC)$  și  $P \in (AB)$ . Se construiește perpendiculara în B pe BR care intersectează PC în D și perpendiculara în C pe PC care intersectează BR în E. Arătați că  $[BE] \equiv [DC]$  și D, A, E puncte coliniare.
- 25). Se dă triunghiul  $\triangle ABC$  echilateral. Să se afle măsura unghiurilor formate de bisectoarele a două unghiuri ale triunghiului.
- 26). Fie  $\triangle ABC$  echilateral și  $[AM] \equiv [AN]$ ,  $M \in (AB)$  și  $N \in (AC)$ . Arătați că  $MN \parallel BC$ .

## Proprietățile triunghiului dreptunghic



### NOTIUNI DE BAZĂ

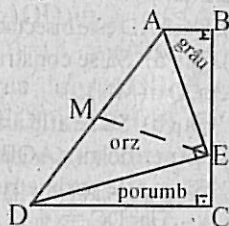
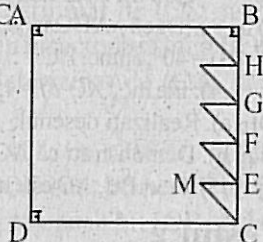
- se numește triunghi dreptunghic triunghiul care are un unghi drept
- într-un triunghi dreptunghic cateta care se opune unui unghi cu măsura  $30^\circ$  are lungimea egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei
- în orice triunghi dreptunghic, lungimea medianei corespunzătoare ipotenuzei este egală cu jumătate din lungimea ipotenuzei.



## PROBLEME

\*\*

- 1). Fie unghiul  $\angle AOB$  cu măsura de  $30^\circ$  și  $C \in (OA)$  astfel încât  $OC = 6$  cm. Aflați  $CD$ ,  $D \in (OB)$  astfel încât  $CD \perp OB$ .
- 2). Fie unghiul  $\angle AOB$  a cărui măsură este de  $120^\circ$  și  $C \in (OA)$  astfel încât  $OC = 8$  cm. Aflați  $OD$  și  $OE$  unde  $E$  și  $D \in OB$  astfel încât  $CD \perp OA$  și  $CE \perp OB$ .
- 3). Fie unghiul  $\angle AOB$  a cărui măsură este de  $60^\circ$  și  $(OE)$  bisectoarea lui, astfel încât  $OE = 4$  cm. Determinați distanțele de la  $E$  la laturile unghiului.
- 4). În exteriorul  $\triangle ABC$  echilateral se consideră  $D \in (BC)$  astfel încât  $[BC] = [CD]$ . Arătați că triunghiul  $\triangle ABD$  este dreptunghic.
- 5). În triunghiul  $\triangle ABC$  cu  $m(\angle A) = 90^\circ$  și  $m(\angle B) = 60^\circ$ , se duce  $AD \perp BC$ ,  $D \in (BC)$  și  $E \in (DC)$ , simetricul lui  $B$  față de  $AD$ . Să se arate că  $\triangle ABE$  echilateral,  $\triangle AEC$  isoscel și  $AE$  mediana în  $\triangle ABC$ .
- 6). Care este punctul de intersecție al mediatoarelor unui triunghi dreptunghic?
- 7). În  $\triangle ABC$  cu  $m(\angle A) = 90^\circ$ ,  $m(\angle B) = 60^\circ$  fie  $BE$  bisectoarea lui  $\angle ABC$ ,  $E \in (AC)$  și  $ED \perp BC$ ,  $D \in (BC)$ . a). să se arate că  $D$  este mijlocul lui  $(BC)$ ; b). dacă  $AC = 9$  cm, aflați  $BE$  și  $ED$ .
- 8). În  $\triangle ABC$  cu  $m(\angle B) = 90^\circ$  și  $m(\angle C) = 30^\circ$  se duce  $BD \perp AC$ ,  $D \in (AC)$ . Dacă  $AD = 4$  cm, aflați  $AC$ .
- 9). În  $\triangle ABC$  se știe că  $m(\angle A) = 90^\circ$ ,  $AB = 6$  cm și  $m(\angle C) = 30^\circ$ . Dacă  $D$  este mijlocul lui  $(BC)$ , aflați  $P_{\triangle ABD}$ .
- 10). În  $\triangle ABC$  se știe că  $m(\angle B) = 90^\circ$ ,  $AC = 12$  cm și  $AB = 5$  cm. Dacă  $D$  este mijlocul lui  $(AC)$ , aflați  $P_{\triangle ABD}$ .
- 11). Fie  $\triangle ABC$  în care se știe că unghiul exterior din  $B$  este de 4 ori mai mare decât  $\angle A$  și unghiul exterior din  $C$  este de 3 ori mai mare decât  $\angle A$ . Arătați că  $BC = AB/2$ .
- 12). În  $\triangle ABC$  ( $[AB] = [AC]$ ),  $m(\angle A) = 120^\circ$  și  $AC = 6$  cm. Să se afle lungimea medianei corespunzătoare laturii  $BC$ .
- 13). Fie  $\triangle ABC$  cu  $m(\angle A) = 90^\circ$ . Dacă  $m(\angle B)$  este de 4 ori mai mare decât  $m(\angle C)$ , să se afle măsurile unghiurilor formate de mediana  $AD$  cu ipotenuza  $BC$ , ( $D \in (BC)$ ).
- 14). Fie  $\triangle ABC$  oarecare. Dacă  $CC'$  și  $BB'$  sunt înălțimile corespunzătoare laturilor  $AB$  respectiv  $AC$ , să se demonstreze că  $\triangle MB'C'$  este isoscel, unde  $M$  este mijlocul laturii  $BC$ .
- 15). Fie  $\triangle ABC$  oarecare și  $AD \perp BC$ ,  $D \in (BC)$ ,  $M$  și  $N$  mijloacele laturilor  $[AB]$  respectiv  $[AC]$ . Arătați că : a).  $\triangle AMN \cong \triangle DMN$ ; b).  $AD \perp MN$ ; c).  $MN \parallel BC$ .
- 16). Figura alăturată reprezintă un bloc cu parter, 4 etaje și scara lui de incendiu, având dimensiunile  $BC = 7,5$  m,  $BH = HG = GF = FE = EC$ . Scara  $MC$  face cu  $DC$  un unghi de  $30^\circ$ . Aflați : a). lungimea scării  $MC$ ; b). dacă treptele se pun la distanța de 25 cm unele de altele, câte trepte sunt pe  $MC$ ? Câte trepte sunt de la sol la acoperiș?
- 17).  $ABCD$  este un teren cu  $m(\angle B) = m(\angle C) = 90^\circ = m(\angle AED)$ ,  $(EC) \equiv (AB)$ ,  $m(\angle EDC) = 36^\circ$ . a). cum sunt suprafețele cultivate cu grâu și porumb? b). dacă  $ME$  este o potecă - drumul cel mai scurt de la  $E$  la  $AD$ , aflați poziția lui  $M$  pe  $AD$ . c). aflați lungimea lui  $ME$  în funcție de  $AD$ .



## Relații între laturile și unghiurile unui triunghi oarecare



### NOTIUNI DE BAZĂ

- într-un triunghi unui unghi mai mare i se opune o latură mai mare și reciproc.
- dintre două oblice duse dintr-un punct pe aceeași dreaptă, cea „mai depărtată” de piciorul perpendicularei este „cea mai lungă”.
- într-un triunghi lungimea oricărei laturi este mai mică decât suma lungimilor celorlalte două laturi și mai mare decât valoarea absolută a diferenței lor.

### PROBLEME

\*

1). Ordonați laturile crescător în triunghiurile următoare :

- $\triangle ABC$  cu  $m(\angle A) = 30^\circ$ ,  $m(\angle B) = 80^\circ$
- $\triangle ABC$  cu  $m(\angle A) = m(\angle B) = 15^\circ$
- $\triangle ABC$  cu  $m(\angle A) = 85^\circ$  și  $m(\angle C) = 20^\circ$
- $\triangle ABC$  cu  $m(\angle B) = 70^\circ$  și  $m(\angle C) = 40^\circ$
- $\triangle ABC$  cu  $(AB) = (AC)$  și  $m(\angle B) = 60^\circ$

2). Ordonați unghiurile în următoarele triunghiuri :

- $\triangle ABC$  cu  $AB = 5$  cm,  $BC = 8$  cm și  $P_{\triangle ABC} = 20$  cm.
- $\triangle ABC$  cu  $AB = 8$  cm,  $AC = 7$  cm și  $P_{\triangle ABC} = 23$  cm.
- $\triangle ABC$  isoscel cu  $AB = 2$  cm și  $AC = 5$  cm.

3). Care este cea mai mare latură într-un triunghi obtuzunghic ? Dar într-un triunghi dreptunghic ?

\*\*

4). Să se precizeze care din următoarele numere pot fi laturile unui triunghi :

- 3; 4 și 5
- 3; 4 și 8
- 7; 2 și 5
- 8; 8 și 3
- 9; 9 și 20
- 14; 4 și 3
- 14; 4 și 12
- 14; 4 și 20

5). Să se ordoneze bisectoarea, mediana și înălțimea ce pornesc toate din vârful unghiului de  $90^\circ$  într-un triunghi dreptunghic.

### Testul 1

- 2p 1). Aflați  $m(\angle C)$  în triunghiul  $ABC$  dacă  $m(\angle A) = 90^\circ$  și  $m(\angle B) = 37^\circ$ .
- În  $\triangle ABC$  isoscel,  $(AB) \equiv (AC)$  cu  $m(\angle A) = 40^\circ$  se duce bisectoarea  $(BD)$  a unghiului  $\angle ABC$ ,  $D \in (AC)$ .  
 1p a). Realizați desenul; 1p b). Aflați  $m(\angle BDC) = \dots\dots$
- 1p 3). Dacă  $\triangle ABC$  isoscel,  $(AB) \equiv (AC)$  se duce înălțimea  $AD$ ,  $D \in (BC)$ ,  $DC = 2,5$  cm și  $m(\angle B) = 40^\circ$ , atunci  $BC = \dots\dots$  și  $m(\angle DAB) = \dots\dots$
- Fie  $m(\angle XOY) = 45^\circ$  și  $B \in (Ox)$ ,  $BA \perp (Oy)$ ,  $A \in (Oy)$ ,  $AC \perp (Ox)$ ,  $C \in (Ox)$ .

1p a). Realizați desenul;

2p b). Demonstrați că  $AC$  este mediatoarea lui  $(OB)$  și bisectoarea lui  $\angle OAB$ .

1p 5). În  $\triangle ABC$ ,  $AD$  este mediană. Unde trebuie ales punctul  $E \in AD$  astfel încât  $A_{\triangle AEC} = \frac{1}{4} A_{\triangle ABC}$  ?

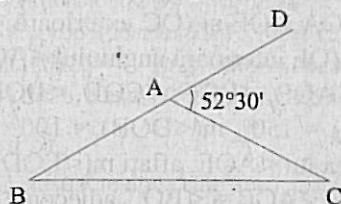
### Testul 2

- 2p 1). Dacă  $AD$  este bisectoarea  $\angle BAC$  al triunghiului echilateral  $ABC$ ,  $D \in (BC)$ , atunci  $m(\angle ADC) = \dots\dots$
- 1p a). Să se construiască un triunghi isoscel  $MNP$  știind că baza  $MN = 10$  cm și înălțimea  $PQ = 4$  cm,  $Q \in (MN)$ .  
 1p b). Să se afle aria triunghiului  $MNP$ .
- 2p 3). Să se afle  $m(\angle AOB)$  în triunghiul  $ABC$ , dacă  $O$  este ortocentrul triunghiului.
- 2p 4). Să se afle perimetrul  $\triangle ABC$  echilateral, dacă  $D$  este piciorul înălțimii dusă din  $A$ ,  $D \in (BC)$  și  $BD = 3x - 5$  iar  $DC = x + 13$ .

- 10) 1p 5). Fie  $\triangle ABC$  dreptunghic în B cu  $m(\angle C) = 30^\circ$ . Dacă distanța de la A la BC este 6 cm, să se afle AC și CD unde  $BD \perp AC$ ,  $D \in (AC)$ .

### Testul 3

- 1). 52p a). Să se deseneze  $\triangle ABC$  știind că  $m(\angle A) = 90^\circ$ ,  $AC = 5$  cm și  $AB = 7$  cm.  
 52p b). Să se afle  $A_{\triangle ABC}$ .
- 10) 1p 2). Dacă mediana  $[AO]$  a triunghiului ABC, dreptunghic în A, este congruentă cu cateta AB, să se afle  $m(\angle AOC)$ .
- 2p 3). În figura alăturată,  $\triangle ABC$  isoscel de bază BC are  $m(\angle CAD) = 52^\circ 30'$ ,  $\angle CAD$  fiind exterior triunghiului. Să se afle măsurile unghiurilor triunghiului ABC.
- 1p 4). În  $\triangle ABC$  cu  $m(\angle A) = 70^\circ$ ,  $m(\angle C) = 50^\circ$  se duce bisectoarea BD,  $D \in (AC)$  și  $DE \parallel AB$ ,  $E \in (BC)$ . Să se afle  $m(\angle BDE)$  și  $m(\angle BED)$ .
- 1p 5). În  $\triangle ABC$ ,  $m(\angle B) = 90^\circ$ ,  $m(\angle C) = 30^\circ$ , se știe  $AC = 32$  cm. Dacă E este mijlocul laturii AC, atunci perimetrul  $\triangle ABE$  este egal cu ..... cm.



### Probleme recapitulative

- Aflați valoarea de adevăr a propozițiilor următoare dacă A, B, C, D coliniare în această ordine :  
 a).  $[BC] \subset AD$     b).  $[AD] \cap [BD] = [BD]$     c).  $C \in [AD] \cap [BD]$     d).  $[AB] \cup [BC] = [AC]$   
 e).  $B \in (AB) \cup (BC)$     f).  $B \in [AC] \cap [BC]$     g).  $C \in [AC] \cap [BC]$     h).  $A \in [AC] \cap [BC]$
- Fie A, B, C puncte coliniare în această ordine, M, N mijloacele segmentelor  $[AB]$  și  $[AC]$ . Aflați MN dacă  $BC = 8$ ,  $AC = 14$ .
- Arătați că dacă A, B, C coliniare,  $AB > BC$ , atunci M mijlocul lui  $[AC]$  aparține segmentului  $[AB]$ .
- Arătați că dacă A, B, C, D coliniare, astfel încât  $[AB] \equiv [CD]$ , atunci mijlocul lui  $[AD]$  coincide cu mijlocul lui  $[BC]$ .
- Arătați că dacă A, B, C, D coliniare,  $AB = 6$ ,  $BC = 8$ ,  $CD = 2$ . Aflați MN dacă M și N sunt mijloacele segmentelor  $[AD]$ , respectiv  $[BC]$ .
- Fie semidreptele (OA, (OB, (OC, (OD în același semiplan determinat de (OD, astfel încât  $\angle BOA \equiv \angle COD$ . Arătați că bisectoarea lui  $\angle AOD$  coincide cu bisectoarea lui  $\angle BOC$ .
- Fie semidreptele (OA, (OB, (OC, (OD în același semiplan determinat de (OA, dacă  $\angle AOC \equiv \angle BOD$  atunci  $\angle AOB \equiv \angle COD$ .
- Fie unghiurile adiacente două câte două,  $m(\angle AOB) = 40^\circ$ ,  $m(\angle BOC) = 50^\circ$ ,  $m(\angle COD) = 40^\circ$ . Arătați că bisectoarele unghiurilor  $\angle AOB$  și  $\angle COD$  sunt perpendiculare.
- Fie  $\angle AOB$  și  $\angle BOC$  adiacente complementare, (OD semidreapta opusă lui (OB. Aflați măsura  $\angle AOB$  și  $\angle BOC$  dacă : a).  $m(\angle AOD) = 130^\circ$ ; b).  $m(\angle AOD) = 2 \cdot m(\angle AOB)$ ; c).  $m(\angle AOD)$  este cu  $20^\circ$  mai mică decât  $m(\angle DOC)$ ; d).  $m(\angle AOD) = 4 \cdot m(\angle BOC)$ .
- Fie  $\angle AOB$ ,  $\angle BOC$  adiacente suplementare, (OD bisectoarea lui  $\angle AOB$ , (OE opusă bisectoarei. Aflați măsurile lui  $\angle AOB$  și  $\angle BOC$  dacă : a).  $m(\angle EOC) = 50^\circ$  b).  $m(\angle EOC)$  este cu  $10^\circ$  mai mare decât  $m(\angle BOC)$ ; c).  $m(\angle AOE)$  este de trei ori mai mare decât  $m(\angle EOC)$ ; d).  $\angle AOE \equiv \angle AOB$ ; e).  $\angle AOE$  și  $\angle BOC$  suplementare; f).  $\angle BOC$  și  $\angle COE$  complementare.



- 11). Fie  $\angle AOB$  și  $\angle AOC$  neadiacente suplementare, (OD semidreapta opusă lui (OB. Dacă  $m(\angle AOD) = 108^\circ$ , aflați  $m(\angle DOC)$ .
- 12). Fie (OD, (OC, (OA, (OE, (OB semidrepte astfel încât D, O, B coliniare, C, A, E în același semiplan determinat de DB,  $OC \perp OE$ , (OE bisectoarea lui  $\angle AOB$ ,  $m(\angle COA) = 38^\circ$ . Aflați  $m(\angle DOC)$ .
- 13). Fie  $AF \cap EB = \{O\}$ , (OD interioară lui  $\angle EOF$  astfel încât  $\angle AOE = \angle EOD$ . Dacă  $(OC \perp (OD$  și  $m(\angle FOC) = 10^\circ$ , aflați  $m(\angle AOB)$ .
- 14). Fie  $(OA \perp (OB$  și  $(OC$  exterioară  $\angle AOB$  astfel încât  $\angle AOC = \angle BOC$ . Dacă E, O, F coliniare, (OE interioară unghiului  $\angle AOB$ ,  $m(\angle BOE) = 13^\circ$ , aflați  $m(\angle FOC)$ ,  $m(\angle AOC)$ .
- 15). Fie  $\angle AOB$ ,  $\angle BOC$ ,  $\angle COD$ ,  $\angle DOE$  și  $\angle EOA$  unghiuri în jurul unui punct astfel încât  $m(\angle AOC) = 150^\circ$ ,  $m(\angle DOB) = 100^\circ$  și  $OA \perp OE$ . Dacă semidreapta opusă lui (OB este bisectoarea lui  $\angle AOE$ , aflați  $m(\angle EOD)$ ,  $m(\angle DOC)$ ,  $m(\angle AOB)$ .
- 16). Se dau  $\angle AOB$  și  $\angle BOC$  adiacente suplementare astfel încât  $m(\angle BOC)$ , reprezintă  $1/3$  din  $m(\angle AOB)$ . Considerând (OD bisectoarea lui  $\angle AOB$  și  $OE \perp AC$ , să se afle  $m(\angle DOE)$ .
- 17). Să se afle unghiurile  $\triangle MNP$  dacă ele sunt direct proporționale cu numerele 2, 4, 6. Ce fel de triunghi este ?
- 18). În  $\triangle ABC$  isoscel,  $[AB] = [AC]$ , (BD bisectoarea lui  $\angle B$  și  $BE \perp AC$ . Dacă  $m(\angle DBE) = 15^\circ$  aflați unghiurile  $\triangle ABC$ .
- 19). În  $\triangle ABC$ ,  $m(\angle C) = 70^\circ$ ,  $AD \perp BC$ ,  $m(\angle BAD) = 30^\circ$ ,  $E \in AC$  astfel încât  $m(\angle ABE) = 40^\circ$ ,  $AD \cap BE = \{H\}$ . Arătați că  $CH \perp AB$ .
- 20). Fie  $\triangle ABC$  dreptunghic,  $m(\angle A) = 90^\circ$ . M mijlocul lui BC,  $DM \parallel AC$ . Dacă  $CD \cap AM = \{H\}$  arătați că H aparține mediane corespunzătoare laturii AC.
- 21). În  $\triangle ABC$ ,  $AM \perp BC$ ,  $M \in BC$ , AM intersectează bisectoarea lui  $\angle B$  în F și bisectoarea exterioară a lui  $\angle C$  în E. Dacă  $m(\angle A) = 20^\circ$ ,  $m(\angle AEC) = 40^\circ$ , arătați că : a).  $\triangle ABC$  isoscel; b). unghiurile  $\triangle BFM$  congruente cu unghiurile  $\triangle MFE$ .
- 22). Fie  $\triangle ABC$  isoscel,  $[AB] = [AC]$  și (BD, (CD bisectoarele exterioare pentru  $\angle B$  și  $\angle C$ . Să se demonstreze că (AD este bisectoarea lui  $\angle A$ .
- 23). Fie  $\triangle ABC$  oarecare, (BD, (CD bisectoarele exterioare pentru  $\angle B$  și  $\angle C$ . Să se demonstreze că (AD este bisectoarea lui  $\angle A$ .
- 24). Un  $\triangle ABC$  are  $m(\angle A) = 70^\circ$  și E  $\in$  bisectoarei  $\angle B$  astfel încât  $m(\angle BEC) = 140^\circ$ . Dacă  $m(\angle ABE) = 20^\circ$ , arătați că (CE și (AE sunt bisectoare.
- 25). În  $\triangle ABC$  isoscel,  $[AB] = [AC]$ , (AD bisectoarea lui  $\angle A$ , M mijlocul lui [AB],  $BE \perp MD$ ,  $E \in AD$ . Demonstrați că  $CE \perp AB$ .
- 26). Fie triunghiul  $\triangle ABC$ ,  $[AB] = [AC]$  se consideră mediatoarea AD,  $D \in (BC)$ ,  $DE \parallel AB$ ,  $E \in (AC)$ . Să se demonstreze că E este mijlocul laturii AC.



- 1). Deșertul este pentru oază cum este oceanul pentru : apă, nisip, mare, insulă, râu.
- 2). În cadrul unui concurs Ionuț este pe primul loc, Maria pe locul 5, iar Daria este exact la jumătatea dintre ei. Dacă Cezar are mai multe puncte ca Sergiu, iar Sergiu este exact după Daria, atunci cine este pe locul 2 ?
- 3). Ioana are de 4 ori mai multe puncte ca Maria, iar Maria are de 3 ori mai multe puncte decât Daria. În total au 192 puncte. Câte puncte are Daria ?

## Capitolul XIV

### PROBLEME PENTRU PREGĂTIREA CONCURSURILOR ȘCOLARE

1. Determinați numerele  $a, b, c$  știind că elementele mulțimii  $\{a+b; a+c; b+c\}$  sunt invers proporționale cu elementele mulțimii  $\{6; 4; 3\}$  și  $\frac{23abc}{ab+ac+bc} = 15$ .

2. a). Unghiurile  $A$  și  $B$  ale triunghiului isoscel  $ABC$  sunt direct proporționale cu 2 și 4. Aflați măsurile unghiurilor  $\triangle ABC$ . b). Laturile  $AB$  și  $BC$  ale triunghiului isoscel  $ABC$  sunt invers proporționale cu 3 și 5. Știind că perimetrul triunghiului este egal cu 143 cm, aflați lungimile laturilor triunghiului  $ABC$ . *prof. Matrosenco Elena*

3. Se consideră patru numere  $a, b, c, d$  astfel încât  $a$  este 20% din  $b$ ,  $b$  este 20% din  $c$  iar  $c$  este 20% din

$d$ . Să se determine numerele  $a, b, c, d$  știind că  $\sqrt{a \cdot b \cdot c \cdot d} = d$ .

4. Pe o dreaptă  $(d)$  se consideră o sută de puncte  $A_1, \dots, A_{100}$ , distincte două câte două. Câte segmente determină aceste puncte pe dreapta  $(d)$ ? Dacă lungimea segmentului  $(A_1 A_{100})$  este  $a$  cm, ce lungime va avea suma segmentelor obținute? *prof. Udrea Tatiana*

5. Determină  $x, y \in \mathbb{Z}$  care verifică relația  $3 \cdot |x - y + 5| + |-7| \cdot (y - 3)^2 = 0$ .

6. Lungimile laturilor patrulaterului convex  $ABCD$  verifică relațiile:  $AB = 15$  cm,  $BC = \frac{4}{3} \cdot AB$ ,  $AD + CD = 90$  cm și  $AD = \frac{5}{4} \cdot CD$ . Calculează perimetrul patrulaterului și lungimile laturilor sale.

*prof. Modoiu Cristina*

7. O familie cu 2 copii urmează să se așeze în același timp la o masă pătrată de 4 locuri. Calculează probabilitățile următoarelor evenimente:  $E_1$  - părinții să se așeze alături;  $E_2$  - părinții să se așeze față în față;  $E_3$  - copiii să nu stea alături

8. Diferența măsurilor a două unghiuri complementare este de  $36^\circ$ . Află măsurile supplementelor lor.

*prof. Modoiu Marius*

9. Fie  $A = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots + \frac{1}{4010006}$  și  $B = \left(\frac{1}{2003}\right)^0 + \left(\frac{1}{2003}\right)^1$ . Să se afle media aritmetică.

10. Dacă numerele  $x$  și  $y$  sunt direct proporționale cu 2 și  $a$ , a prim, și suma pătratelor numerelor  $x$  și  $y$  reprezintă 216, (6)% din produsul lor, să se afle  $a$ . *prof. Neagoe Cristina*

11. Aflați trei numere naturale direct proporționale cu 17, 6 și 10 știind că cel mai mic multiplu comun al lor este 420.

12. Fie unghiurile  $\angle xoy$  și  $\angle xoz$  neadiacente suplementare și  $(OA)$  și  $(OB)$  bisectoarele lor. Dacă  $m(\angle AOB) = 32^\circ$  să se afle măsurile  $\angle xoy$  și  $\angle xoz$ . *prof. Manea Ioana*

13. Se dau numerele naturale  $x, y, z$  astfel:  $x = (4^{1003} \cdot 25 \cdot 3^3)$ ;  $2^{2004} : 5 : (3^{13})^2$ ;  $y = 10101_{(2)}$ ;  $z = \overline{ab}$ ,  $a < b$  și  $\overline{ab}$  este cel mai mic număr natural divizibil cu 5. Calculați: a).  $(x; y; z)$ ,  $[x; y; z]$ ; b).  $(x; x - z)$ ,  $[x; y + z]$ ; c). Spuneți cât la sută reprezintă numărul  $z$  din  $x$ ; dar numărul  $y$  din  $[x; y]$ ?

14. Se dau punctele coliniare  $A, O, B, O \in (AB)$ . De aceeași parte a dreptei  $AB$  se consideră punctele  $C$  și  $D$  astfel încât  $\angle AOC \equiv \angle COD \equiv \angle DOB$ , iar  $[OA] \equiv [OC] \equiv [OD] \equiv [OB]$ . Perpendiculara  $CT$  pe  $AB$  ( $T \in (AO)$ ) intersectează semidreapta  $[BD$  în  $M$ , iar perpendiculara  $DP$  pe  $AB$  ( $P \in (OB)$ ) intersectează semidreapta  $[AC$  în  $N$ . Demonstrați: a).  $[CO] \equiv [ED]$  unde  $\{E\} = BM \cap AN$ ; b).  $\triangle MEC \equiv \triangle NED$ . *prof. Dincă Georgeta*

*Giurgiu*

15). Se dau  $x, y, z, t$ , patru unghiuri în jurul unui punct. Știind că  $\{2x; 4y; 3z; 5t\}$  direct proporțională cu  $\{4; 12; 6; m\}$ , unde  $m$  este un număr natural, să se determine  $m, x, y, z, t$ , dacă  $x + z = y + t$ .

16). Pe o dreaptă  $d$  se consideră punctele  $A, B, C, D, K, M, L$ , în această ordine astfel încât  $AB = BC = CD$  și  $DK = KM = ML$ . a). lungimea segmentelor  $(CK)$  și  $(BM)$ . b). lungimea segmentului  $(AB)$  în cazul în care  $C$  este mijlocul segmentului  $(AL)$ . *prof. Scarlat Carmen*

*Pucioasa*

## Capitolul XV

### Recapitulare pentru testare

#### Puteri

1). Calculați :

a).  $(2^7 - 2^6 - 7^2)^2 - 14^2 =$

b).  $(2^3 + 4^2 \cdot 8^4 : 16^4 + 2^5) : 2^2 - 2^0 =$

2). Rezolvați în  $\mathbb{N}$  :

a).  $2^3 \cdot x + 3^2 = 5^2$

b).  $0,6x - 3,8 = 0,4$

c).  $3^2x - 1 \leq 4^2 + 7^0 + 6^2$

d).  $(3^9 - 3^8) : 3^7 + 2x = 20$

e).  $2^{18} : (2^{15} - 2^{14}) - 3x = 7$

3). Aflați  $ab + ac$  dacă  $b + c = 15$  și  $a = \frac{1}{3}$ .

4). Aflați  $ab - bc$  dacă  $b = 2,5$  și  $a - c = 3,8$ .

5). Dacă  $a + 3b = 5$  : a). aflați  $x$  din  $8a + 24b - 3x = 13$

b). aflați  $5a + 15b$  c). aflați  $x \in \mathbb{N}$  din  $ax + 3bx + 1 \leq 46$

6). Aflați cel mai mare număr natural care împărțit la 7 dă câtul 5.

7). Aflați suma tuturor numerelor naturale care împărțite la 5 dau câtul 7.

8). Aflați  $x \in \mathbb{Q}$  dacă  $x + 2x + 3x + \dots + 50x = 2 + 4 + 6 + \dots + 80$ .

9). Cum sunt următoarele fracții (subunitare, supraunitare sau echiunitare) :

a).  $\frac{5^{12}}{3^{18}}$  b).  $\frac{2^{16}}{8^5}$  c).  $\frac{9^{40}}{27^{27}}$  d).  $\frac{2^{33}}{3^{27}}$  e).  $\frac{4^{34} - 4^{33}}{3^{45}}$

10). Aflați vârsta mamei și a fiului ei dacă acum 3 ani vârsta mamei era de 4 ori mai mare decât vârsta fiului și acum vârsta mamei împărțită la vârsta fiului dă câtul 2 rest 11.

11). Aflați un număr de două cifre  $\overline{ab}$  știind că  $b$  împărțit la  $a$  dă câtul 1 rest 3 și  $\overline{ab}$  împărțit la  $b$  dă câtul 7 rest 2.

12). Rezolvați : a).  $108 : 3 - 5^2 + x = 41$  b).  $2(x + 248 \cdot 8) - (7^2 + 24^2) : 25 = 10$

13). Rezolvați în  $\mathbb{N}$  :

a).  $(x + 3)(y + 1) = 18$

b).  $(2x + 3)(y - 1) = 21$

c).  $x + 2xy = 15$

14). Rezolvați : a).  $4x + 3(x + 6) = 32 + 5x$  b).  $2(x + 6) + 3(2x + 1) = 5(x + 6)$

15). Aflați toate numerele naturale care împărțite la 8 dau câtul egal cu restul.

16). Aflați toate numerele naturale care împărțite la 9 dau câtul de 2 ori mai mare decât restul.

### Transformări

1). Efectuați transformările :

a).  $3,7 \text{ dam} = \dots \text{ m}$

b).  $13 \text{ m}^2 = \dots \text{ cm}^2$

c).  $4 \text{ h} = \dots \text{ min}$

d).  $5 \text{ m} + 0,8 \text{ cm} = \dots \text{ dm}$

e).  $0,18 \text{ m}^3 = \dots \text{ litri}$

f).  $8 \text{ ha} - 790 \text{ ari} = \dots \text{ m}^2$

g).  $0,016 \text{ cm}^3 = \dots \text{ mm}^3$

h).  $2700 \text{ cm}^3 = \dots \text{ litri}$

2). O curte în formă de dreptunghi cu aria de  $140 \text{ m}^2$  are  $L = 35 \text{ m}$ . Aflați lățimea și perimetrul curții.

3). Suprafața unei curți în formă de dreptunghi este de  $450 \text{ m}^2$ , iar lungimea curții este de două ori mai mare decât lățimea. Ce lungime va avea gardul care înconjoară curtea ?

4). Podeaua unei camere este un pătrat de latură  $4 \text{ m}$  și trebuie acoperită cu bucăți de gresie de latură  $50 \text{ cm}$ . Câte bucăți de gresie vor fi folosite ?

5). O cantitate de  $80 \text{ hl}$  se toarnă în sticle de  $0,75 \text{ litri}$ . Aflați necesarul de sticle.



- 6). O groapă în formă de paralelipiped cu  $L = 40$  dm,  $l = 300$  cm,  $h = 0,2$  m. Câți  $m^3$  de pământ sunt necesari pentru a astupa groapa ?
- 7). O curte de formă dreptunghiulară cu  $l = 2$  dam și  $L = 1,7$  hm este înconjurată de un gard de sârmă. Știind că sârma se pune pe 5 rânduri, aflați câți m de sârmă sunt necesari.
- 8). Aflați aria unui dreptunghi cu perimetrul de 32 m și lățimea egală cu 60% din lungime.
- 9). O parcelă de pământ cu dimensiunile 70 m și 0,8 hm are formă dreptunghiulară și este cultivat astfel :  $\frac{9}{14}$  din teren cu roșii,  $\frac{2}{7}$  cu cartofi și restul cu ardei. Ce suprafață este cultivată cu ardei ?
- 10). Câți litri de apă intră într-un cub de latură 2m ?
- 11). Câte pachete de biscuiți de 450 g poate transporta o dubiță de 1800 kg ?

### Fracții zecimale

1). Calculați :

- a).  $0,12 + 0,144 : 0,9 =$       b).  $1,56 : 1,2 - 1,1^2 =$       c).  $(2,4^2 + 0,7^2) : 0,5 - 3,5^2 =$   
d).  $3,7 : 5 - 0,8^2 =$       e).  $3,18 \cdot 10 - 5,1^2 =$       f).  $5,8 \cdot 16,5 : 10 - 2,7^2 =$   
g).  $37,25 : 2,5 \cdot 0,8 - 4,1^2 =$       h).  $5 - 4,2 : 0,6 : 10 =$

2). O persoană a cheltuit în prima zi 43,75 lei, a doua zi cu 15,55 lei mai puțin și a treia zi cu 2 lei mai mult decât media aritmetică a primelor 2 cifre. Dacă la început a avut 200 lei, aflați ce sumă i-a mai rămas.

3). Aflați  $x$  :

- a).  $2,3(5x - 1) + x = 6x + 0,2$       b).  $3x = x + 2,9$       c).  $2,5x + 3 = 1,7x + 6,2$

4). Găsiți cel mai mare număr natural mai mic decât 3,14.

5). Dați un exemplu de număr rațional cuprins între 2,1 și 2.

6). Câți lei primește rest la 100 lei o persoană care cumpără : 2 pachete biscuiți de 3,4 lei/pachet; 1 pui de 1,3 kg cu 10,2 lei/kg; 4 litri de lapte cu 3,85 lei.litru; 3 pâini de 1,2 lei și 3,5 kg cartofi de 1,4 lei/kg.

7). 8,7 litri de suc se toarnă în sticle de 0,3 l. Câte sticle se vor umple ?

8). Calculați media la matematică a unui elev care are notele 5, 8, 5, 6, 9 și teza 8.

9). Găsiți toate numerele naturale cuprinse între 2,56 și 5,1.

10). O persoană a cheltuit în 2 zile 58,2 lei. Știind că a doua zi a cheltuit de 2 ori mai mult decât în prima zi, aflați ce sumă a cheltuit în fiecare zi.

11). La un magazin s-a vândut dimineață  $\frac{3}{8}$  din cantitatea de cartofi și după amiază  $\frac{1}{3}$  din rest. Știind că au mai rămas 19 kg, aflați ce cantitate era la început în magazin.

12). Să se rezolve în  $N$  :

- a).  $2x + 0,8 < 3,2^2$       b).  $0,5(x + 3) \leq 6$       c).  $1,2x + 0,6^2 > 4,8$       d).  $4 - 0,2x < 96 - 3x$

### Fracții ordinare

- 1). Aflați  $x \in N$  dacă :
- a).  $\frac{2x + 4}{3x}$  este supraunitară      b).  $\frac{5x - 6}{2x}$  este subunitară  
c).  $\frac{2x + 7}{4x - 1}$  este echiunitară      d).  $\frac{2x + 11}{x^3}$  este supraunitară

2). Aflați x dacă se cunoaște :

a).  $\frac{3x}{34}$  ireductibilă      b).  $\frac{1x}{20}$  este ireductibilă      c).  $\frac{2x}{30}$  este ireductibilă

3). Simplificați :

a).  $\frac{39}{65}$       b).  $\frac{49}{98}$       c).  $\frac{49}{91}$       d).  $\frac{\overline{ab} + \overline{ba}}{3}$   
 e).  $\frac{\overline{a3b} + \overline{b2} + \overline{a1}}{\overline{b5a} + \overline{b2} + \overline{a3}}$       f).  $\frac{2^{74} + 4^{40}}{8^{25} \cdot 5}$       g).  $\frac{105}{63}$       h).  $\frac{132}{143}$

4). Calculați : a).  $\left(\frac{3}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) : \left(\frac{1}{2}\right)^2 =$       b).  $\left(\frac{5}{6} : 2\frac{1}{2} + 5 : \frac{9}{10}\right) \cdot \frac{3}{14} =$

c).  $\left(0,5 + \frac{3}{4}\right) : 0,5 =$       d).  $0,3 : 0,1(3) + 0,75 =$       e).  $\left(2\frac{1}{15} - 1\frac{3}{20}\right) : 3\frac{2}{3} - 0,25 =$

f).  $\left(\frac{4}{21} + \frac{3}{24}\right) : 1,25 + 1,3 =$       g).  $0,8 : \left(2\frac{5}{18} - 1\frac{4}{27}\right) - 3,15 =$

5). Un om a mers în prima zi  $\frac{3}{8}$  dintr-un drum și a doua zi  $\frac{1}{3}$  din rest. Știind că i-au mai rămas de mers 10 km, aflați ce distanță a fost la început.

6). Rezolvați în Q :

a).  $\frac{3}{4}x + 0,5 = 6$       b).  $8 - \frac{x}{2} = \frac{x}{3}$       c).  $2 - \frac{x+1}{2} = x$       d).  $\frac{x+1}{2} - \frac{3}{4} = \frac{x}{3}$

7). După ce a parcurs  $\frac{3}{5}$  dintr-un drum un om a observat că mai are 0,75 km pentru a ajunge la  $\frac{3}{4}$  din drum. Aflați lungimea drumului.

8). Rezolvați : a).  $2\left(x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{3} = 1,6$       b).  $2\frac{1}{2} + \frac{x-2}{3} = 4 - x$

9). Aflați fracția :

a). cu numărătorul 6 și echivalentă cu  $\frac{9}{12}$  ; b). echivalentă cu  $\frac{5}{10}$  și cu numitorul 8.

10). Dintre fracțiile  $\frac{5}{6}$  și  $\frac{7}{8}$  mai mare este .....

11). Rezolvați în N : a).  $2,5x \leq x + 9$       b).  $2(x + 2,3) - 1,7 \leq x + 6$   
 c).  $\frac{x+1}{2} - \frac{1}{3} < 2$       d).  $2\frac{1}{2} + \frac{x+1}{3} > \frac{x+3}{4}$

12). Dați exemplu de fracție cuprinsă între  $\frac{1}{5}$  și  $\frac{1}{3}$ . Dar între  $\frac{1}{3}$  și  $\frac{1}{2}$  ?

13). Găsiți o fracție cu numitorul 24 cuprinsă între  $\frac{1}{4}$  și  $\frac{1}{3}$ .

## Rapoarte și proporții

1). Aflați două numere care au raportul  $\frac{2}{3}$  și suma lor este 25.

2). Aflați un unghi dacă raportul dintre complementul și suplementul lui este  $\frac{2}{5}$ .

- 3). Aflați  $x$  din : a).  $\frac{2x+1}{x-2} = 3$  b).  $\frac{x+3}{2x-3} = 1$  c).  $\frac{x+2}{13} = \frac{x-3}{3}$
- 4). Aflați  $\frac{2x+3y}{x+y}$  dacă știm  $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$ .
- 5). Aflați  $\frac{x}{y}$  dacă știm  $\frac{2x+5y}{4x-y} = \frac{9}{7}$ .
- 6). Aflați numerele  $a, b$  și  $c$  dacă sunt direct proporționale cu 3, 5 și 7 și media lor aritmetică este 15.
- 7). Aflați numerele  $a, b$  și  $c$  știind că sunt invers proporționale cu 1; 2; 3 și  $2xy + yz = 42$ .
- 8). Aflați  $a$  și  $b$  dacă  $a+2; 5; 6$  sunt direct proporționale cu 12; 15;  $b$ .
- 9). Aflați aria unui dreptunghi care are laturile invers proporționale cu 2 și 5 și perimetrul egal cu 42.
- 10). Dintr-o bucată de material pot fi confecționate 15 bluze. Știind că pentru o bluză se consumă 2 m de material și pentru o rochie se consumă 3 m de material, calculați câte rochii se pot confecționa din aceeași bucată de material.
- 11). Dacă 18 oameni reușesc să sape în 4 zile un șanț, în câte zile vor săpa același șanț 12 oameni ?
- 12). Dacă 8 muncitori realizează 56 piese pe oră, atunci câte piese vor face pe oră 9 muncitori ?
- 13). Aflați probabilitatea ca alegând un număr din primele 20 de numere naturale, el să fie prim.

## Divizibilitate

- 1). Aflați  $x$  dacă : a).  $\overline{58x} : 2$  b).  $\overline{47x2} : 4$  c).  $\overline{x3x} : 5$   
d).  $\overline{23x4} : 3$  e).  $\overline{3x4x} : 3$  f).  $\overline{87x} : 9$
- 2). Aflați  $x$  și  $y$  dacă : a).  $\overline{32x} : 6$  b).  $\overline{12x} : 20$  c).  $\overline{58x} : 18$   
d).  $\overline{x2y} : 15$  e).  $\overline{2x1y} : 12$  f).  $\overline{x3y} : 45$  g).  $\overline{1x3y} : 36$
- 3). Demonstrați că :  $\frac{n(n+1)(n+2)}{6} \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$ .
- 4). Calculați :  $(180; 252); (225; 375); [27; 18; 36]$ .
- 5). Aflați  $x$  dacă : a).  $(\overline{2x}; 4) = 1$  b).  $(\overline{3x}; 6) = 1$  c).  $(\overline{1x}; 5) = 1$   
d).  $(\overline{4x}; 4) = 2$  e).  $(\overline{3x}; 9) = 3$
- 6). Arătați că următoarele sunt adevărate :  
a).  $(\overline{a3b} + \overline{ba6} + \overline{ba}) : 3$  b).  $(2 + 2^2 + \dots + 2^{40}) : 3$  c).  $(\overline{ab2} - \overline{ba2}) : 9$   
d).  $(2^{41} + 4^{20} \cdot 3) : 5$  e).  $(\overline{a3b} + \overline{b2} + \overline{a1}) : 11$  f).  $(2^{n+1} \cdot 3^n + 6^{n+2}) : 19$
- 7). Aflați numerele naturale  $a$  și  $b$  care au produsul  $ab = 372$  și  $(a; b) = 7$ .
- 8). Aflați numerele naturale  $a$  și  $b$  care au suma  $a + b = 120$  și  $(a; b) = 12$ .
- 9). Aflați numerele naturale  $a$  și  $b$  care au produsul  $ab = 150$  și  $[a; b] = 30$ .
- 10). 91 de creioane și 123 gume se împart la un număr de copii și rămân rest 1 creion și 3 gume. Știind că fiecare copil a primit același număr de gume și același număr de creioane, aflați numărul maxim de copii.
- 11). Un număr de copii pot fi împărțiți în grupe de câte 2; 3; 4 sau 5 și rămâne de fiecare dată



un copil singur. a). Care este numărul minim de copii ? b). Aflați un număr care îndeplinește condițiile cuprins între 310 și 380.

12). Arătați că  $5 \cdot 10^n + 1$  nu este prim.

13). Stabiliți care număr este prim : 107 sau 91.

14). Care este cel mai mic număr de două cifre care au exact doi divizori ? Dar cel mai mare ?

## Procente

1). Într-o clasă de 28 elevi, 25% sunt fete. Câți băieți sunt ?

2). Dintr-un drum de 75 km, în prima zi, un om a parcurs 24%. Câți km i-au mai rămas ?

3). O persoană a cheltuit în prima zi 23% din banii săi și i-au rămas 380 lei. Ce sumă a avut inițial ?

4). După ce a citit 16% dintr-o carte i-au mai rămas 168 de pagini. Câte pagini avea cartea ?

5). Un elev a rezolvat în prima zi 25% din temă și a doua zi 20% din temă. Dacă i-au mai rămas 12 exerciții, aflați câte exerciții a avut tema.

6). Pe două rafturi se află 720 de cărți. Știind că pe primul sunt 80% din numărul cărților de pe al doilea raft, aflați câte cărți sunt pe fiecare raft.

7). Într-o clasă cu 28 elevi, fetele reprezintă 75% din numărul băieților. Câți băieți sunt în clasă ?

8). După o majorare cu 10%, prețul unui obiect costă acum 55 lei. Aflați cât costă înainte de majorare.

9). Dacă numărul fetelor dintr-o clasă reprezintă 120% din numărul băieților, aflați cât la sută reprezintă fetele din numărul elevilor din clasă.

10). Un om culege în 8 ore 20 kg de cireșe. În primele 4 ore culege 75% din cantitatea totală, iar în ultimele 4 ore, când obosise iar afară temperatura ajunsese la 32°C, strânge restul. a). Câte kg de cireșe a strâns în prima jumătate de zi ? b). Dar în ultime 4 ore ? De ce a cules atât de puțin în a doua jumătate a zilei ? d). Putea culege mai mult dacă își organiza altfel munca ? e). Între ce ore trebuia să facă pauză ?

11). Doi prieteni au cules împreună din pădure 20 kg de zineură și afine. În prima zi au strâns  $\frac{3}{4}$  din cantitatea totală, a doua zi a plouat și au cules 15% din cantitatea totală și a treia zi au cules de pe un teren accidentat. Știind că suprafața de pe care au cules era un pătrat cu aria de 100  $\text{dam}^2$ , aflați : a). Câte kg de fructe au cules în fiecare zi ? b). Dece au cules mai puțin în a doua zi ? c). Dar în a treia zi ? d). Cum ar fi trebuit să fie echipați a doua zi pentru a culege mai mult ? e). Ce perimetru are terenul de pe care au cules ? f). Au procedat bine, plecând împreună ? g). De ce ?

## Mulțimi

1). Determinați elementele mulțimilor și calculați  $A \cup B$  și  $B - A$  dacă  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid 3(x+1) \leq 20\}$  și  $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \mid 30\}$ .

2). Aflați  $x \in \mathbb{N}$ ,  $x < 0$ , știind că mulțimile sunt disjuncte :  $A = \{2; 3; x\}$  și  $B = \{x \in \mathbb{N} \mid 2x+6 > 17\}$ .

3). Calculați : a).  $D_{20} \cap D_{16}$  b).  $D_9 \cup D_{12}$  c).  $D_{30} \cap M_3$  d).  $D_{24} - M_2$

4). Aflați elementele mulțimilor A și B dacă se știe că  $A \cup B = \{1; 3; 4; 5; 6\}$ ,  $A \cap B = \{3\}$ ,  $A - B = \emptyset$ .

5). Fie  $A = \left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{6}{x+1} \in \mathbb{N}\right\}$  și  $\left\{x \in \mathbb{N} \mid \frac{x+1}{3} \in \mathbb{N}\right\}$ . Calculați elementele lui A; B și  $A \cap B$ .

## Operații cu numere întregi

1). Calculați :

a).  $(-7 - 3 \cdot 8 - 1^3) : (-4) =$

b).  $[(-15 : 3 + 8)^2 + (-4)^2] : (-5) =$

2). Dacă  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| \leq 6\}$  și  $B = \{x \in \mathbb{Z} \mid 2(x+1) - 3 \leq 3\}$ , calculați  $A \cap B$  și  $A \cup B$ .

3). Într-o zi de iarnă dimineața, la ora 8<sup>00</sup>, temperatura este de  $-7^{\circ}\text{C}$  și la ora 12<sup>00</sup> era de  $2^{\circ}\text{C}$ .  
Cu cât a crescut temperatura ?

4). Rezolvați în  $\mathbb{Z}$  :

a).  $2x + 16 = 8$

b).  $3 - 5x = x + 9$

c).  $4 + 3(x - 6) = 1$

d).  $5x + 16 = 3x - 2$

e).  $2x + 3(x + 1) = 5x$

f).  $4x - 2(x - 4) = x - 10$

g).  $4x + 8 \leq x - 1$

h).  $2(2x + 3) > 3x$

## Geometrie

1). Aflați câte drepte determină 4 puncte necoliniare două câte două. Dar 5 puncte ?

2). Un unghi este de 4 ori mai mare decât suplementul lui. Aflați unghiul.

3). Aflați un unghi care are complementul cu  $15^{\circ}$  mai mic decât jumătatea suplementului.

4). Aflați un unghi care are suplementul egal cu 250% din complement.

5). Patru unghiuri sunt în jurul unui punct astfel încât al doilea este dublul primului, al treilea este cu  $30^{\circ}$  mai mare decât primul și al patrulea este media aritmetică a primelor trei. Aflați numerele.

6). Unghiurile formate de două drepte concurente sunt direct proporționale cu 3 și 7. Aflați diferența lor.

7). În  $\triangle ABC$ ,  $m(\angle A) = 24^{\circ}$ ,  $BD \perp AC$ ,  $DE \parallel BC$ ,  $E \in (AB)$ . Dacă  $\angle EDB = 20^{\circ}$ , aflați unghiurile triunghiului  $ABC$ .

8). În  $\triangle ABC$ ,  $m(\angle C) = 20^{\circ}$ ,  $BD$  bisectoarea  $\angle ABC$  și  $DE \parallel AB$ ,  $E \in (BC)$ ,  $m(\angle BDE) = 20^{\circ}$ . Aflați măsura unghiurilor  $\triangle ABC$  și arătați că  $\triangle BDE$  este isoscel.

9). Aflați două unghiuri interne de aceeași parte a secantei, formate de două drepte paralele, dacă sunt invers proporționale cu 2 și 3.

10). Fie  $\triangle ABC$  cu  $m(\angle B) = 90^{\circ}$ ,  $m(\angle C) = 30^{\circ}$ ,  $M$  mijlocul lui  $BC$ ,  $AC = 20$  cm. Aflați  $P_{\triangle AMB}$ .

11). În  $\triangle ABC$  isoscel  $(AB) \equiv (AC)$  se iau punctele  $D \in (AB)$ ,  $E \in (AC)$ ,  $(BD) \equiv (EC)$  și se duce  $AM$  înălțime,  $AM \perp BC$ . a). arătați că  $(DM) \equiv (ME)$ ; b). demonstrați că  $DE \parallel BC$ .

12). Fie  $\triangle ABC$  isoscel,  $(AB) \equiv (AC)$  și  $M$  și  $N$  mijloacele laturilor  $(BC)$  și  $(AC)$ ,  $AM \cap BN = \{G\}$ . Dacă  $m(\angle AGN) = 45^{\circ}$  și  $AG = 6$  cm, calculați aria  $\triangle ABC$ .

13). Fie  $\triangle ABC$  isoscel,  $(AB) \equiv (AC)$  cu  $m(\angle BAC) = 120^{\circ}$  și  $BC = 6$  cm. Aflați mărimile unghiurilor  $\triangle ABC$  și lungimea înălțimii din  $C$ .

14). În  $\triangle ABC$  se cunoaște  $m(\angle BAC) = 90^{\circ}$ ,  $m(\angle ACB) = 30^{\circ}$  și se duc  $BD$  bisectoarea unghiului  $\angle ABC$ ,  $D \in (AC)$  și  $DE \perp BC$ . a). arătați că  $(AD) \equiv (DE)$ ; b). demonstrați că  $E$  este mijlocul lui  $(BC)$ .

## Capitolul XVI

### TESTE PENTRU EVALUARE

#### Testul 1

I. Alegeți răspunsul corect :

- 1).  $1 : (-5)^2$  este un număr : a). natural b). întreg c). rațional
- 2). Soluția ecuației  $1 - 2x = 7$  este : a). 3 b). -3 c). 4
- 3). Triunghiul cu două unghiuri congruente este triunghi :  
a). echilateral b). isoscel c). obtuzunghic
- 4). Dacă  $xa + xb = 102$  și  $x = 3$ , atunci  $a + b$  este : a). nu se poate afla b). 34 c). 17
- 5). Dacă  $a = 3^9$  și  $b = 5^9$ , atunci : a).  $a > b$  b).  $a < b$  c).  $a = b$
- 6). Rezultatul calculului  $3 - 2 : 0,4$  este : a). 2,5 b). 2 c). -2
- 7). Dacă media aritmetică a numerelor : 3,2 ;  $2\frac{4}{5}$  și  $x$  este 4, atunci  $x$  este :  
a). 2 b). 6,9 c). 6
- 8). Două unghiuri corespondente sunt : a). complementare b). suplementare c). congruente
- 9). Un triunghi cu o latură de 16 cm și înălțimea corespunzătoare ei de 9 cm are aria :  
a). 72 cm<sup>2</sup> b). 144 cm<sup>2</sup> c). 36 cm<sup>2</sup>

II. La următoarele probleme se cer rezolvări complete :

- 10). Cel mai mic număr impar mai mare decât pătratul lui 5 este cubul lui  $x$ . Aflați  $x$ .
- 11). Aflați  $a$  și  $b$  dacă  $(a; b) = 6$  și  $[a; b] = 144$ .
- 12). Aflați măsurile unghiurilor în jurul unui punct dacă sunt direct proporționale cu 3; 4; 5; 8; 10.
- 13). Un om avea 20 de ani când s-a născut primul lui copil. El are acum 3 copii cu vârste consecutive impare și vârsta lui este egală cu suma vârstelor lor. Câți ani au copiii ?
- 14). Fie  $\triangle ABC$  dreptunghic în  $\angle B$  și  $CD$  bisectoarea  $\angle BCA$ ,  $D \in (AB)$ . Se duce  $DE \parallel BC$ ,  $E \in (AC)$  și  $EF \perp DC$ ,  $F \in (DC)$ . Arătați că : a).  $\angle DE \equiv \angle EC$ ; b).  $BF \equiv DF$ ; c).  $\angle EDF \equiv \angle FBC$ .

#### Testul 2

I. Completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate :

- 1).  $(-3)^8 : (-3)^5 = \dots$
- 2). Perpendiculara dintr-un vârf al unui triunghi pe latura opusă se numește ....
- 3). 3,8 hl - 1800 dl - 1700 cl = .... l
- 4). Dacă  $\frac{2}{3}x - \frac{5}{6} = 1$  atunci  $x = \dots$
- 5). Frațiile  $1\frac{1}{2}$ ;  $\frac{3}{8}$ ;  $\frac{2}{5}$ ;  $\frac{17}{10}$  ordonate crescător sunt ....
- 6). Calculând  $(15; 21)$  se obține.....
- 7). Dacă  $(3x; 4) = 2$  atunci  $x \in \{\dots\}$ .
- 8). Un triunghi dreptunghic cu un unghi de 45° are o catetă egală cu ....
- 9). Simplificată, fracția  $\frac{x00x}{xx0xx}$  devine fracția ireductibilă .....



II. La următoarele probleme se cer rezolvări complete :

10). Demonstrați că fracția  $\frac{n^2 - n}{2}$  este reductibilă.

11). Câți litri de apă încap într-un cub cu latura de 1,7 m ?

12). Aflați cea mai mare fracție de forma  $\frac{x^2y}{1a2b}$  care se simplifică cu 15.

13). O cantitate de 6,3 kg biscuiți se așează în pachete de 45 g. Pachetele se transportă câte 24 într-o cutie. Câte cutii sunt necesare pentru toată cantitatea de biscuiți ?

14). Prin vârfurile A și C ale unui  $\triangle ABC$  se duc paralelele  $AD \parallel BC$  și  $DC \parallel BA$ .

a). Arătați că  $\angle D \equiv \angle B$ .

b). Dacă se cunoaște perimetrul  $\triangle ABC$  de 20 cm și  $AC = 9$  cm, calculați  $P_{ABCD}$ .

### Testul 3

I. 1). Alegeți pentru fiecare ecuație sau inecuație din coloana stângă, soluția corectă din coloana dreaptă :

- |  |                            |
|--|----------------------------|
| a). $2x + 3 = 17$                      | 1). $\{10\}$               |
| b). $15 - 3x = 0$                      | 2). $\emptyset$            |
| c). $2(x + 1) = 2x + 1$                | 3). $\{4\}$                |
| d). $3x + 7 \leq 22, x \in \mathbb{N}$ | 4). $\{5\}$                |
| e). $2^x - 1 = 15$                     | 5). $\{7\}$                |
|  | 6). $\{8\}$                |
|  | 7). $\{0; 1; 2; 3; 4; 5\}$ |

2). Completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate :

- |   |   |
|---|---|
| a). $[143; 77] = \dots$                   | b). dacă $(5x; 6) = 3$ atunci $x \in \{\dots\}$                   |
| c). Calculați : $(-2)^3 + (-6)^2 = \dots$ | d). transformați în fracție ordinară ireductibilă $1,(5) = \dots$ |

II. La următoarele probleme se cer rezolvări complete :

3). Dacă se știe  $\frac{x}{y} = \frac{2}{3}$  aflați  $\frac{5x + y}{2x + 3y}$ .

4). Calculați : a).  $\left[\frac{5}{6} - 0,(3)\right]^3 : 0,5^4 =$  b).  $3,16 : 0,4 - 2,8^2 =$

5). După ce mănâncă o treime din nucile pe care le avea, un copil observă că i-au mai rămas cu 7 nucii mai multe decât jumătate din câte avea la început. Câte nucii avea ?

6). A, B, C, D sunt puncte coliniare în această ordine astfel încât AB, BC, CD au lungimile numere consecutive și  $AD = 63$  cm. Dacă M și N sunt mijloacele pentru (AB) și (CD), aflați MN.

7). În  $\triangle ABC$  dreptunghic, cu  $m(\angle B) = 90^\circ$ ,  $m(\angle C) = 30^\circ$  și D mijlocul lui (AB), avem  $AC = 8$  cm și  $DE \perp AC$ ,  $E \in (AC)$ . Aflați EC.

8). Aflați numărul  $\overline{ab}$  dacă se știe  $\overline{4ab} + \overline{a2b} + \overline{3b1} + \overline{a2} = 1023$ .

### Testul 4

I. Completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate :

1).  $17 \text{ kl} = \dots \text{ m}^3$

2). Probabilitatea ca la aruncarea unui zar să obții o față cu un număr prim de puncte este .....

3). Dacă un dreptunghi are perimetrul egal cu 25 cm și lățimea egală cu 12% din perimetru, atunci raportul dintre lățime și lungime este .....

4). Supplementul unghiului de  $105^\circ$  are ..... $^\circ$ .

5). Un triunghi dreptunghic isoscel are unghiurile ascuțite de ..... $^\circ$ .

6). Dacă unghiurile unui triunghi sunt invers proporționale cu 2; 3; 6, atunci este triunghi .....

7). Dacă  $[a; b] = 12$  și  $(a; b) = 2$  atunci  $a \cdot b = \dots$ .

8). Calculați: a).  $1, (6) - 0,3 = \dots$  b).  $(-6)^2 : (-2) - (-4)^2 = \dots$

II. La următoarele probleme se cer rezolvări complete :

9). Rezolvați : a).  $3\left(x - \frac{5}{6}\right) + x = \frac{x+1}{3}, x \in \mathbb{Q}$  b).  $5x < 2(x + 2,4), x \in \mathbb{N}$

10). Elevilor unei clase li se împart 80 de creioane și rămân rest 8, 57 de caiete și rămân rest 9 și 131 bomboane și rămân rest 11. Care este numărul maxim de copii din clasă ?

11). Un fermier are un teren în formă de dreptunghi cu  $l = 1,2$  dam și  $L = 150$  dm pe care cultivă viță de vie, culegând 12 kg de struguri de pe  $1 \text{ m}^2$ . Din 6 kg de struguri el obține 3,5 l vin pe care îl îmbuteliază în sticle de 750 ml. Câte sticle obține ?

12). Punctele A și C se află de o parte și de alta a segmentului (BD) astfel încât BD este bisectoare pentru  $\triangle ABC$  și pentru  $\triangle ADC$ .

a). Demonstrați că  $\triangle ABD \equiv \triangle CBD$ .

b). Demonstrați că A și C sunt simetrice față (BD).

c). Ce este BD pentru segmentul (AC) ?

## Testul 5

I. Completați spațiile libere pentru a obține propoziții adevărate :

1). Se numesc unghiuri complementare două unghiuri care .....

2). Dacă  $\overline{ab} + \overline{3a} + \overline{b2} = \overline{1ab}$  atunci  $\overline{ab} = \dots$ .

3). Dacă într-un triunghi isoscel un unghi are  $98^\circ$ , atunci celelalte două unghiuri au ..... $^\circ$ .

4). Într-un triunghi isoscel mediana din vârf este ..... și .....

5). Dacă două unghiuri suplementare sunt direct proporționale cu 5,5 și 3,5, atunci cel mai mic unghi are ..... $^\circ$ .

6). Dacă într-un triunghi dreptunghic un unghi ascuțit are  $18^\circ$ , atunci celălalt unghi ascuțit are ..... $^\circ$ .

7). Dacă 3 oameni reușesc să strângă recolta dintr-o vie în 4 zile, atunci 4 oameni vor strânge aceeași recoltă în ..... zile.

8). Un triunghi dreptunghic cu mediana corespunzătoare ipotenuzei de 1,7 cm are ipotenuza de ..... cm.

9). Simplificați pentru a obține fracție ireductibilă  $\frac{24024}{1144}$ .

II. La următoarele probleme se cer rezolvări complete :

10). Fie  $A = \{x \in \mathbb{N} \mid \overline{34x} : 2 \text{ sau } \overline{34x} : 3\}$  și  $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ ultima cifră a unui pătrat perfect}\}$   
Aflați cardinalul lui  $A \cap B$ .

11). Copiii dintr-o școală pot fi așezați câte 12, 16 sau 18 și rămân mereu 3 neincluși într-o grupă. Câți elevi are școala dacă numărul lor este între 1100 și 1200 ?

12). Rezolvați: a).  $0,3x - 1,7 = \frac{x}{2} - 2, x \in \mathbb{Q}$

b).  $2x + 8 \leq 17, x \in \mathbb{N}$

13). Fie  $\triangle ABC$  și  $CD$  bisectoarea  $\angle ACB$ ,  $D \in (AB)$ . Dacă ducem paralela  $AE \parallel DC$ ,  $E \in (BC)$ , demonstrați că  $(AC) \equiv (CE)$ .

14). Fie  $\triangle ABC$  dreptunghic în  $\angle B$ , cu catetele  $AB = 6$  cm și  $BC = 8$  cm. Dacă  $M$  și  $D$  sunt mijloacele segmentelor  $(AC)$  respectiv  $(AB)$ :

a). arătați că  $A_{ADM} = \frac{1}{2} A_{ABC}$

b). demonstrați că  $DM \parallel BC$ .

### Testul 6

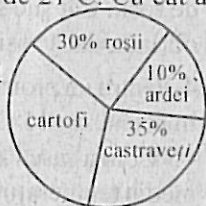
1. Produsul vârstelor a 2 frați este 7. Știind că sunt exprimate prin numere naturale, aflați suma vârstelor lor.

2. Nuferrii care cresc pe un lac își dublează suprafața în fiecare zi. Dacă în prima zi aveau  $2 \text{ dm}^2$ , calculați ce suprafață vor ocupa ei în a doua zi, a treia zi, a patra zi, a cincea zi, și a șasea zi și scrieți rezultatele sub formă de tabel.

3. Pentru a pune 2 kg de varză la saramură avem nevoie de 10 boabe de piper, 12 g sare și 2 legături de mărar. Calculați cantitățile necesare pentru a mura 25 kg varză.

4). Dimineață la ora  $5^{00}$  se înregistrau  $17^\circ\text{C}$  și la ora  $9^{00}$  temperatura era de  $21^\circ\text{C}$ . Cu cât a crescut temperatura ?

5). Diagrama circulară alăturată arată proporția culturilor pe o suprafață de teren. Aflați întreaga suprafață a terenului și suprafețele cultivate cu fiecare legumă dacă cartofii ocupă  $300 \text{ m}^2$ .



6). Pentru a construi o casă se face o groapă în pământ pentru fundație.

Știind că groapa are forma unui paralelipiped cu  $L = 1,2$  dam,  $l = 7$  m și  $h = 15$  dm, calculați volumul de pământ scos din groapă. Pământul, care cântărește  $1300 \text{ kg}$  la un  $\text{m}^3$ , este transportat cu camioane care pot duce 2t. Câte drumuri va face camionul pentru a muta tot pământul scos ?

7). Curtea mea are forma unui  $\triangle ABC$  isoscel,  $AB = AC$ . În punctul  $M$ , mijlocul laturii  $(BC)$ , se află câinele și pisica mea. Pentru că nu se înțeleg, ei pleacă unul spre  $AB$ , celălalt spre  $AC$  pe drumurile cele mai scurte. Care ajunge primul (dacă au aceeași viteză) ?

### Testul 7

1. Pe 2 ianuarie la ora  $7^{00}$  dimineața se înregistrau  $-7^\circ\text{C}$  și la ora  $14^{00}$  erau  $5^\circ\text{C}$ . Ce diferență de temperatură a fost ?

2. O persoană a cumpărat o pâine, 2 ciocolate, 3 litri de lapte și 1 kg de brânză. Dacă pâinea costă 1,2 lei, ciocolata este de 2,5 ori mai scumpă decât pâinea; prețul unui litru de lapte reprezintă 110% din prețul unei ciocolate și pe brânză a plătit cât pe ciocolată și lapte împreună, aflați ce rest a primit de la o hârtie de 50 lei.

3. Un tren parcurge distanța de 60 km în 45 minute. Un autoturism parcurge aceeași distanță în 30 de minute. Aflați cu cât la sută este mai mare viteza autoturismului față de viteza trenului.

4. Un număr de 144 fete și 120 băieți se împart în grupe care au același număr de băieți și același număr de fete. a). arătați că se pot forma 12 grupe. b). arătați că nu se pot forma 15 grupe. c). găsiți numărul maxim de grupe care se pot forma și numărul minim.



5. Măsurând lungimea unui copac astfel : înălțimea coroanei, lungimea trunchiului și adâncimea la care ajunge rădăcina se obțin în total 9 m. Știind că rădăcina este cât jumătate din coroană și trunchi la un loc și coroana este de 2 ori mai înaltă decât lungimea trunchiului, aflați lungimea fiecărei părți a copacului.

6. Un cub cu latura de 20 cm este plin cu apă. a). Câți litri de apă se află în cub ?

b). Câte sticle de 500 ml se pot umple cu apa din cub ?

7. Grădina din fața casei mele are forma unui triunghi dreptunghic ABC cu  $m(\angle B) = 90^\circ$ ,  $AB = 12$  m și  $BC = 16$  cm. Dacă aleea BM (M mijlocul lui (AC)) are lungimea de 10 cm, aflați : a). aria grădinii (inclusiv aleea); b). lungimea distanței de la B la AC; c). care teren are suprafața mai mare :  $\triangle ABM$  sau  $\triangle BMC$  ?

## Testul 8

1. Pentru a face o prăjitură, la 400 g făină se pun : 2 ouă, 20 ml ulei, 220 g zahăr și 10 g stafide. Calculați cantitățile necesare pentru 1 kg de făină.

2. Bradul are rădăcina pivotantă de lungime aproximativ 0,05 din înălțimea sa. Ce lungime are rădăcina unui brad înalt de 30 m ?

3. Dintr-un kg de roșii stoarse prin mașină, 10% reprezintă pielea și semințele, restul este suc de roșii. Cât suc se obține prin prelucrarea a 7,3 kg roșii ? Cât costă kg de suc de roșii astfel obținut, dacă roșiile au costat 2 lei/kg ?

4. Pentru un proiect școlar, un elev a observat și notat temperatura zilnică timp de o săptămână: în prima zi -  $15^\circ\text{C}$ ; în a doua zi -  $10^\circ\text{C}$ ; în a treia zi -  $12^\circ\text{C}$ ; în a patra zi -  $17^\circ\text{C}$ ; în a cincea zi -  $5^\circ\text{C}$ ; în a șasea zi -  $2^\circ\text{C}$ ; în a șaptea zi -  $7^\circ\text{C}$ . Treceți datele obținute pe un grafic și calculați media temperaturii în cele 7 zile.

5. Mama vrea să împartă 45 de nuci și 75 de bomboane în pungi identice. Care este numărul maxim de pungi pe care le poate face ?

6. Un paralelipiped cu dimensiunile  $L = 3$  m,  $l = 20$  dm și  $h = 100$  cm este plin cu apă.

a). câți litri de apă conține paralelipipedul ?

b). dacă paralelipipedul se golește printr-un robinet cu debitul de 75 litri pe minut, în câte minute se va scurge toată apa ?

7. O curte în formă de  $\triangle ABC$  dreptunghic, cu  $m(\angle C) = 90^\circ$  este tăiată de o alee  $MN \parallel AC$ ,  $M \in (AB)$  și  $N \in (BC)$ . Dacă  $m(\angle B) = 30^\circ$ ,  $AB = 20$  m și  $MN = 8$  m, aflați :

a). lungimea lui MC; b). măsura  $\angle M$ ; c). lungimea lui MB.

## Testul 9

1. Castravetele este o legumă care conține 95% apă. Cât lichid rezultă din stoarcerea a 1,5 kg de castraveți ?

2. Produsul a două numere întregi este -7. Aflați suma maximă a celor două numere.

3. Pe o parcelă, suprafața ocupată de trandafirii înfloriți se dublează în fiecare zi. Dacă azi, duminică, trandafirii înfloriți au acoperit întreaga parcelă, adică  $32 \text{ m}^2$ , în ce zi acoperiseră un sfert din parcelă ? Dar  $0,5 \text{ m}^2$  ?

4. Pe versantul de est al munților Ciucaș, o asociație de voluntari din rândul elevilor au sădit 1080 de puiți de brazi și molizi, săpând câte o groapă pentru fiecare. Au participat 30 de

elevi voluntari și au executat toate gropile în 9 zile. Câte gropi a realizat în medie fiecare elev pe zi ? Știind că fiecare elev a muncit 8 ore pe zi, în câte ore au săpat, în medie, o groapă ?

5. Patru proprietari și-au dat în arendă terenurile agricole pe care le aveau astfel : primul - 2 ha; al doilea -  $800 \text{ m}^2$ ; al treilea -  $3\frac{1}{4}$  ha; al patrulea -  $1\frac{7}{10} \text{ hm}^2$ . Arendașul a lucrat pământul, a strâns recolta, a vândut, a plătit cheltuielile și a obținut un profit de 12513,4 lei. Știind că arendașul își oprește 60% din profit și dă proprietarilor sume de bani direct proporționale cu suprafețele de lucru, calculați ce sumă a primit fiecare.

6. Într-un bax de formă paralelipipedică cu dimensiunile  $L = 6 \text{ dm}$ ,  $l = 3 \text{ dm}$ ,  $h = 4 \text{ dm}$  au fost ambalate cutii de biscuiți în formă de cub cu latura de 10 cm. Dacă o cutie de biscuiți cântărește 100 g, aflați : a). câte cutii de biscuiți au încăput în bax; b). câte kg are baxul; c). cât valorează 15 baxuri, dacă o cutie de biscuiți se vinde cu 1,2 lei.

7. Două triunghiuri echilaterale ABC și BCD au latura BC comună. a). arătați că  $AB \parallel DC$ ; b). demonstrați că AD este mediatoarea lui (BC).

## Testul 10

1. O mașină care merge cu 60 km/h va parcurge o distanță într-o oră și 20 minute. În câte minute va parcurge aceeași distanță cu viteza de 80 km/h ?

2. Într-o clasă sunt un număr de elevi mai mic ca 40. Ei pot fi grupați câte 2; 3 sau 5 și rămâne mereu un copil singur. Câți copii sunt în clasă ?

3. Ciupercile sunt foarte răspândite în țara noastră și cresc în pădure sau în culturi dirijate. O parte sunt comestibile, altele otrăvitoare cum este „pălăria șarpelui”. Pe o suprafață de  $1000 \text{ m}^2$  au răsărit cca. 600 de ciuperci, din care 60% bureți, 20% hribi, 15% creasta cocoșului și 5% pălăria șarpelui. a). Câte ciuperci au crescut, în medie, pe  $1 \text{ m}^2$  ?

b). Câți bureți, hribi, creasta cocoșului și pălăria șarpelui au crescut pe această suprafață ?

4. Un elev a citit în prima zi 4 pagini dintr-o carte și în fiecare din următoarele zile de 3 ori mai mult decât în ziua precedentă. a). După câte zile a ajuns la pagina 52 ? b). câte pagini are cartea dacă a terminat-o în 4 zile ?

5. Un drum a fost parcurs astfel : în prima zi  $\frac{1}{4}$  din el, a doua zi  $\frac{2}{3}$  din rest, a treia zi  $\frac{1}{3}$  din noul rest și a patra zi ultimii 60 km. Aflați ce lungime are tot drumul și cât la sută din el a fost parcurs în a patra zi.

6. Podeaua camerei mele este un dreptunghi cu  $L = 4 \text{ m}$  și  $l = 36 \text{ dm}$  pe care mama vrea să-l acopere cu gresie de formă pătrată, de latură 40 cm.

a). Câte bucăți de gresie se vor folosi ?

b). Dacă este ambalată în cutii de câte 10 buc., care costă 45 lei cutia, aflați câte cutii cumpărăm și ce sumă vom cheltui.

7. Într-un  $\triangle ABC$  oarecare se cunoaște  $m(\angle A) = 40^\circ$ . Eu trasez în  $\triangle ABC$  înălțimile  $BD \perp AC$ ,  $D \in (AC)$  și  $CE \perp AB$ ,  $E \in (AB)$  care se întâlnesc în H. Colegul meu de bancă desenează în același  $\triangle ABC$  bisectoarele BM,  $M \in (AC)$  și CN,  $N \in (AB)$  care se intersectează în I. Care unghi va fi mai mare :  $\angle BIC$  sau  $\angle BHC$  ?

## Testul 11

1. O persoană a depus la bancă o sumă cu dobânda de 7,2% pe an. a). Ce dobândă va lua după un an dacă depune 5000 lei ? b). Ce sumă a depus inițial dacă după un an are în bancă 13400 lei ?
2. Temperatura înregistrată zilnic, timp de o săptămână a fost :  $-2^{\circ}\text{C}$ ;  $-1^{\circ}\text{C}$ ;  $3^{\circ}\text{C}$ ;  $5^{\circ}\text{C}$ ;  $0^{\circ}\text{C}$ ;  $-3^{\circ}\text{C}$ ;  $-5^{\circ}\text{C}$ . Calculați media temperaturilor.
3. Aflați numărul fetelor dintr-o clasă de 28 de elevi știind că dacă pleacă o fată, băieții sunt de două ori mai puțini decât fetele rămase.
4. Elevii unei clase au participat la două acțiuni : au mers la Muzeul de Istorie și în parc. Toți elevii au fost prezenți măcar la una dintre acțiuni,  $\frac{5}{6}$  din ei în parc și  $\frac{2}{3}$  din ei la muzeu. Știind că 15 elevi au fost și în parc și la muzeu, aflați câți elevi are clasa.
5. Aflați măsura unui unghi știind că raportul dintre complementul și suplementul lui este  $\frac{3}{8}$ .
6. O curte sub formă de dreptunghi are perimetrul de 148 m și lungimea împărțită la lățime dă câtul 5 rest 2 m. Pe laturile mai lungi ale curții sunt plantați brăduți din 2 în 2 m, care costă 57 lei bucata. a). Aflați dimensiunile curții; b). Câți brăduți s-au cumpărat și cât au costat ei ?
7. Grădina mea de legume are forma unui  $\triangle ABC$  oarecare. Pentru a-l cultiva cu roșii, ardei și morcovi l-am împărțit astfel : am dus  $AN$  și  $NM$  astfel încât  $NC = 2 \cdot BN$  și  $M$  mijlocul lui  $(AC)$ . a). Demonstrați că aria  $\triangle ABN$  este  $\frac{1}{3}$  din aria  $\triangle ABC$ . b). Arătați că cele 3 parcele sunt echivalente.

## Testul 12

1. Din 250 de pungi cu pufuleți ce se găsesc într-un magazin, 180 nu conțin nicio jucărie sub formă de surpriză. Care este probabilitatea de a găsi o pungă de pufuleți cu surpriză ?
2. Pe planul făcut de arhitect pentru o casă, dimensiunile sunt : lungimea casei de 20 cm, lățimea casei de 12 cm, lungimea curții de 45 cm și lățimea curții 30 cm. Știind că în realitate curtea are lungimea de 36 m, aflați : a). scara planului; b). dimensiunile reale ale casei.
3. Un bazin este alimentat de 2 robinete. Dacă primul robinet umple bazinul în 24 ore și al doilea umple bazinul în 16 ore, aflați : a). ce fracție din bazin reușesc să umple cele 2 robinete dacă curg împreună timp de o oră ? b). în cât timp reușesc ele să umple împreună bazinul ?
4. O persoană cumpără dintr-un magazin 1,2 kg brânză plătind 19 lei per kg, 250 grame de salam de 15 lei per kg, 1,5 kg carne de 21 lei per kg și 350 g măsline plătind 16 lei per kg. a). Cât costă toate cumpărăturile ? b). Ce rest primește de la 100 lei ?
5. Pentru a confecționa 7 bluze se folosesc 14 m de material, iar pentru confecționa 4 rochii se folosesc 12 m de material. a). Câte bluze se pot confecționa din 24 m de material ? b). Câte bluze și câte rochii se pot confecționa din 24 m material ? (dați toate posibilitățile).
6. Aflați mărimile a două unghiuri interne de aceeași parte a secantei dacă diferența măsurilor lor este de  $18^{\circ}$ .
7. Un agricultor are 2 terenuri : unul sub formă de triunghi dreptunghic cu catetele de 12 dam și 2,5 hm și celălalt un dreptunghi cu dimensiunile de 180 m și 65 m. a). Care teren are suprafața mai mare ? b). Dacă productivitatea este de 2 tone la ha pe primul teren și 2,2 tone la ha pe al doilea, ce recoltă se obține ?



# SOLUȚII

## Capitolul I : Teste de evaluare inițială

Testul 1 : I. §1).  $\frac{6}{5}$ . §2). 170. §3). 1. §4). 5. §5). 1; 2; 3; 6. §6). d. §7). a. §8). b. §9). c. II. §10). 12. §11). a). 14; b). 3. §12). a). 1,02 m<sup>3</sup>; b). 2040 sticle. §13). 14; 7; 21. Testul 2 : I. §1). 4. §2). 0,99. §3). 8°. §4). A = 3000 cm<sup>2</sup>. §5). 0,6. §6). Card A ∩ B = 2. §7). a = 6. §8). cât 603 și rest 2. §9). x ∈ {2; 4; 6; 8}. II. §10). 5. §11). 34 și 10. §12). a). nu există soluție în N; b). x ∈ {0; 1; 2}. §13). 200 gr. Testul 3 : I. §1). b. §2). b. §3). a. §4). d. §5). b. §6). d. §7). c. §8). a. §9). d. II. §10). 5. §11). x = 9. §12). 200 km. §13). 426 cm<sup>2</sup>. §14). 124 și 998. Testul 4 : I. §1). c. §2). b. §3). a. §4). c. §5). d. §6). b. §7). 2. §8). c. §9). a. II. §10). 80; 77. §11). x = 5. §12). 4 fete. §13). 7,56 cm<sup>2</sup>. §14). 840 kg.

## Capitolul II : Mulțimea numerelor naturale.

\*\* §1) i) C = 3, R = 30; b) C = 59, R = 1; c) C = 154, R = 17; d) C = 455, R = 98; e) C = 203, R = 5. §2) a) 9; b) 1; c) 3; d) 2806; e) 2; f) 3; g) 0. §3) a) 3; b) 3; c) 1.

**Divizibilitatea :** \*\* §1). a). o. b). D<sub>11</sub>; c). {3; 6; 12; 15; 30; 60}; d). {1; 4; 5}. §3). a). Nu, 15; 3 și 15; 9; b). 12; 2 și 12; 9; c). 18; 9; d). 21; 3, 21; 9. §4). a) 210; 212; 214; 216; 218; b) 423; 453; 483; c) 1200; 1204; 1208; d) 720; 725; e) 8001; 8091; f) 2232; 2838; g) 3108; 3120; 3132; 3144; 3156; 3168; 3180; 3192; h) 1458; i) 5000; 5220; 5440; 5660; 5880; j) 4215; 4245; 4275. §5). a). {2; 3; 6}; b). {0; 1}; c). {2; 4; 12; 34}; d). {0; 1; 2; 4; 10}; e). {0; 1; 4}; f). {3; 4; 13; 24}; g). {3; 8; 13; 18; ...}; h). {2; 5; 8; 11; ...}. §6). a). prim; b). compus 1, 5, 19, 95; c). 1, 3, 41, 123; d). 1, 5, 23, 115; e). 1, 11, 113, 1243; f). 1, 17, 113, 1921; g). 1, 7, 11, 17, 77, 119, 187, 1309. §7). 32 și 21. §9). a). x ∈ {3, 5, 9}; b). x ∈ {1, 3, 7, 9}; c). x ∈ {1, 3, 7, 9}; d). x ∈ {1, 3, 7, 9}; e). x ∈ {1, 3, 5, 7, 9}; f). x ∈ {1, 5, 7}; g). x ∈ {2, 3, 6, 8, 9}. §10). A = {1, 2, 4}. §11). a). Nu, pentru că primul se va divide cu 3 și cu 2 dacă se divide cu 6 și al doilea se va divide cu 3 ⇒ 3 este divizor comun; b). Nu, pentru că 12 și orice multiplu de 4 au divizor comun pe 4. §12). a). 435y : 2 ⇒ 4350, 4352, 4354, 4356, 4358, le alegem pe cele care se divid cu 3 : 4350 și 4356; b). 1260, 1242, 1224, 1206, 1296, 1278; c). 6750, 6255; d). 648; e). 4212, 4512, 4812, 4116, 4416, 4716; f). 135, 435, 735, 330, 630, 930; g). 2420, 2440, 2460, 2400, 2480; h). 3420, 8424, 4428; i). 225; j). 8700, 8750. §13). a). 3/36; b). Nu; c). Nu, 5/(14 - 4); d). Nu, 6/(20 + 4). §14). b). A; c). A d). F; e). A; f). A; g). A; h). F; i). F; j). F; k). A; l). F; m). A; n). A; o). F; p). A; r). F; s). A. §18). a). {2; 3; 6; 11}; b). {1; 7}; c). {0}; d). {3; 4}; e). {5}; f). o. §19). d).  $\frac{4n+3}{2n+1}$  să presupunem că e reducibilă ⇒ se simplifică cu un număr > 1 ⇒ a | (4n + 3) și a | (2n + 1) ⇒ a | 2(2n + 1) ⇒ a | [4n + 3 - 2(2n + 1)] ⇒ a | (4n + 3 - 4n - 2) ⇒ a | 1 ⇒ a = 1 ⇒ fracția este ireducibilă; g). presupunem că fracția este reducibilă ⇒ a | (4n + 3) și a | (5n + 4) ⇒ a | 5(4n + 3) și a | 4(5n + 4) ⇒ a | [4 · 5(4n + 3) - 5(4n + 3)] ⇒ a | (20n + 16 - 20n - 15) ⇒ a | 1 ⇒ a = 1 ⇒ fracție ireducibilă. §21). a). 553 + 21a = 7(79 + 3a); b). 3<sup>40</sup>; 17 : 51; c). n = 0 ⇒ 9 : 3; d). 7<sup>n</sup> · 18 : 9; e). 12<sup>n</sup> · 23 : 23. §22). a). 2a = 6c - 3b ⇒ 2a = 3(2c - b); b). 3b = 6c - 2a ⇒ 3b = 2(3c - a) ⇒ b : 2 și (3c - a) : 3. §23). a). (5a + 4b) + (2a + 3b) = 7a + 7b; b). 8a + 12b = 4(2a + 3b); c). a + 5b = 3(2a + 3b) - (5a + 4b); d). 3a + b = (5a + 4b) - (2a + 3b). §25). a). n = 0 ⇒ x : 2, n ≥ 1 ⇒ x : n. b). n = 0 ⇒ y : 2, n ≥ 1 ⇒ y : 2; c). ultima cifră a lui (6<sup>n</sup> - 1) este 5 sau 0. §26). n = 41. §27). a). n = 0; b). n = 1.

**Descompunerea în factori. C.m.m.d.c. și c.m.m.m.c. :** \* §2). b). 4; c). 12 d). 9; e). 6; f). 5 g). 5; h). 2; i). 6. §3). 45; c). 24; d). 36; e). 48; f). 42; g). 72; h). 108; i). 72; j). 144; k). 150. §4). a). 1; b). 18 c). 450; d). 1; e). 1; f). 30; g). 180; h). 1. §5). a). 2 · 5<sup>2</sup> · 11 = 550; b). 6; c). 20; d). 25; e). 8; f). 5; g). 14; h). 48; i). 18; j). 28; k). 81; l). 33. §6). 2<sup>2</sup> · 3<sup>1</sup> · 5<sup>2</sup> = 2700; b). 2 · 3<sup>2</sup> · 7 · 11 = 1386; c). 36; d). 72; e). 108; f). 70; g). 675; h). 56; i). 60; j). 420; k). 36300; l). 12960; m). 35280. §8) a) 4200; 20; b) 1470; 21; c) 317520; 4; d) 1650; 1. \*\* §9). A = 27, B = 32, (A, B) = 1, [A, B] = 864. §10). a). 4 · 72 = 288; b). A = 20 și B = 160, (A, B) · [4, 6] = 20 · 12 = 480. §11) 12; 144. §12) 12. §14). Notăm cu x numărul căutat și scriem teorema împărțirii cu rest pentru ambele împărțiri: x = 5 · c<sub>1</sub> + 1 și x = 7 · c<sub>2</sub> + 1 ⇒ x - 1 = 5 · c<sub>1</sub> și x - 1 = 7 · c<sub>2</sub> ⇒ x - 1 este multiplu pentru 5 și 7. Cum ni se cere cel mai mic ⇒ x - 1 = c.m.m.m.c. 5, 7 ⇒ x - 1 = 35 ⇒ x = 36. §15). x = 18 · c<sub>1</sub> + 15, x = 72 · c<sub>2</sub> + 15, x = 60 · c<sub>3</sub> + 15 ⇒ x - 15 = 18 · c<sub>1</sub>, x - 15 = 72 · c<sub>2</sub>, x - 15 = 60 · c<sub>3</sub> ⇒ x - 15 = multiplu comun pentru 18, 72 și 60, cum c.m.m.m.c. = 360 ⇒ x - 15 = 360 ⇒ x = 375. §16). 5, 6, 8] = 120 ⇒ cel mai mic x - 3 este 120, alți multipli ai lui 120 sunt: 240, 360, 480, etc. Cum trebuie să fie mai mici ca 300 ⇒ x - 3 = 120 ⇒ x = 123 și x - 3 = 240 ⇒ x = 243. §17). [24, 18, 20] = 360, x - 9 = 360 ⇒ x = 369 și x - 9 = 720 ⇒ x = 729. §18). fie x acest număr, scriem teorema împărțirii cu rest 245 = x · c<sub>1</sub> + 5 și 296 = x · c<sub>2</sub> + 8 ⇒ 245 - 5 = x · c<sub>1</sub> și 296 - 8 = x · c<sub>2</sub> ⇒ 240 = x · c<sub>1</sub> și 288 = x · c<sub>2</sub> ⇒ x este divizor comun peste 240 și 288 mai mare decât resturile 5 și 8 (pentru că x este împărțitor și împărțitorul trebuie să fie mai mare decât restul). Cum ni se cere cel mai mare x ⇒ aflăm cel mai mare divizor comun pentru 240 și 288 ⇒ x = 48. §19). 1092 = x · c<sub>1</sub> + 12, 1792 = x · c<sub>2</sub> + 28, 1619 = x · c<sub>3</sub> + 35 ⇒ 1080 = x · c<sub>1</sub>; 1764 = x · c<sub>2</sub>; 1584 = x · c<sub>3</sub>; (1080, 1764, 1584) = 36. §20). 297 = x · c<sub>1</sub> + 9 și 319 = x · c<sub>2</sub> + 7 ⇒ 288 = x · c<sub>1</sub>; 312 = x · c<sub>2</sub>; (288, 312) = 24 ⇒ trebuie să găsim toți divizorii comuni pentru 288, 312 mai mari ca 9 și 7; cel mai mare este 24 ⇒ 24, 12. §21). (120, 504, 1584) = 24 ⇒ x ∈ {24, 2}. §22). (1364, 1302, 1550) = 62 ⇒ x ∈ {62, 31} ⇒ vor fi în același loc după 15 m și se vor mai întâlni din 15 în 15 m ⇒ se vor întâlni de 6 ori. Se observă din desen

că distanța dintre locul primei întâlniri și locul unde au început este multiplu de trei și 5  $\Rightarrow$  este c.m.m.d.c.  $\Rightarrow [3, 5] = 15$ .  
 $100 : 15 = 6$  rest  $10 \Rightarrow$  de 6 ori. §23). Desenăm puietii plantați de cei doi copii :

• 3 • 3 • 3 • 3 • 3 • 3 •  
 • 5 • 5 • 5 • 5 • 5 • 5 •

§24). Notăm numărul de pachete cu  $x$  și  $c_1$  = câte ciocolate sunt într-un pachet,  $c_2$  = câte bomboane sunt într-un pachet,  $c_3$  = câte napolitane sunt într-un pachet  $\Rightarrow 282 = x \cdot c_1 + 2$ ,  $715 = x \cdot c_2 + 15$ ,  $424 = x \cdot c_3 + 4 \Rightarrow 280 = x \cdot c_1$ ,  $700 = x - c_2$ ,  $420 = x \cdot c_3 \Rightarrow x$  divizor  $\Rightarrow (280, 700, 420) = 140$  pachete. §25).  $x$  = numărul elevilor  $\Rightarrow x$  se divide cu 2, 3 și 5  $\Rightarrow [2, 3, 5] = 30$  cum într-o clasă nu pot fi mai mult de 30 (60, 90, 120, etc.)  $\Rightarrow$  sunt 30 elevi. §26). a).  $9xy : 18 \Rightarrow 900, 990, 972, 954, 936, 918 \Rightarrow$  cel mai mare este 990; b).  $11xy : 75 \Rightarrow 1125$ ; c).  $1xy : 12 \Rightarrow 120, 180, 132, 192, 144, 184, 156, 108, 168 \Rightarrow$  cel mai mic = 108; d).  $9xy : 15 \Rightarrow 915, 945, 975, 900, 930, 960, 990 \Rightarrow$  cel mai mare = 990. §27).  $x = 2 \cdot c_1 + 1$ ,  $x = 3 \cdot c_2 + 1$ ,  $x = 4 \cdot c_3 + 1$ ,  $x = 5 \cdot c_4 + 1 \Rightarrow [2, 3, 4, 5] = 60 \Rightarrow x - 1 = 60 \Rightarrow x = 61$ . §28). b).  $345 = 3 \cdot 5 \cdot 23 \Rightarrow$  numerele pot fi  $3 \cdot 5$  și  $23$ ;  $3 \cdot 23$  și  $5$ ;  $5 \cdot 23$  și  $3$  sau  $345$  și  $1$ ; c).  $56 = 2^3 \cdot 7$ , prime între ele sunt 8 și 7; d).  $48 = 2^4 \cdot 3$ , perechile pot fi 2,24; 4,12; 3,16; 6,8 ( $2,24 = 2$ ; ( $4, 12 = 4$ ; ( $3, 16 = 1$ ; ( $6, 8 = 2 \Rightarrow$  singura pereche care are c.m.m.d.c. = 4 este 4 și 12. §29).  $x = 3 \cdot c_1 + 2$ ;  $x = 8 \cdot c_2 + 7$ ;  $x = 11 \cdot c_3 + 10$  vom aduna numărul 1 în ambii membrii la fiecare relație  $\Rightarrow x + 1 = 3 \cdot c_1 + 2 + 1$ ;  $x + 1 = 8 \cdot c_2 + 7 + 1$ ;  $x + 1 = 11 \cdot c_3 + 10 + 1 \Rightarrow x + 1 = 3 \cdot c_1 + 3$ ;  $x + 1 = 8 \cdot c_2 + 8$ ;  $x + 1 = 11 \cdot c_3 + 11 \Rightarrow x + 1 = 3(c_1 + 1)$ ;  $x + 1 = 8(c_2 + 1)$ ;  $x + 1 = 11(c_3 + 1) \Rightarrow x + 1$  este multiplu comun pentru 3, 8 și 11  $\Rightarrow [3, 8, 11] = 264 \Rightarrow x + 1 = 264 \Rightarrow x = 263$ . §30). notând cu  $x$  numărul căutat :  $x = 8 \cdot c_1 + 6$ ,  $x = 5 \cdot c_2 + 3$ ,  $x = 3 \cdot c_3 + 1$ , adunăm numărul 2 în ambii membrii  $\Rightarrow x + 2 = 8 \cdot c_1 + 6 + 2$ ,  $x + 2 = 5 \cdot c_2 + 3 + 2$ ,  $x + 2 = 3 \cdot c_3 + 1 + 2 \Rightarrow x + 2 = 8(c_1 + 1)$ ;  $x + 2 = 5(c_2 + 1)$ ;  $x + 2 = 3(c_3 + 1) \Rightarrow x + 2$  este multiplu pentru 8, 5 și 3  $\Rightarrow x + 2 = [8, 5, 3] = 120 \Rightarrow x = 118$ . §31). dacă c.m.m.d.c. = 24  $\Rightarrow$  cele două numere se divid cu 24  $\Rightarrow$  ele vor fi multiplii pentru 24  $\Rightarrow$  căutăm multiplii lui 24 : 0, 24, 48, 72, 96, 120, 144, 168. Cum suma lor este 168  $\Rightarrow$  perechile pot fi : 0 și 168, c.m.m.d.c. = 168  $\Rightarrow$  nu sunt bune : 24 și 144, c.m.m.d.c. = 24 bune; 48 și 120, c.m.m.d.c. = 24 bune; 72 și 96, c.m.m.d.c. = 24 bune sau altfel; c.m.m.d.c. lor este 24  $\Rightarrow$  numerele pot fi notate :  $24 \cdot a$  și  $24 \cdot b$  cu  $a$  și  $b$  prime între ele  $\Rightarrow 24a + 24b = 168 \Rightarrow 24 \cdot (a + b) = 168 \Rightarrow a + b = 168 : 24 \Rightarrow a + b = 7$ , deci trebuie să găsim  $a$  și  $b$  prime între ele cu suma 7  $\Rightarrow a = 1$  și  $b = 6$ ,  $a = 2$  și  $b = 5$ ;  $a = 3$  și  $b = 4$  ( $a = 0$  și  $b = 7$  nu sunt prime între ele)  $\Rightarrow$  pentru  $a = 1$  și  $b = 6 \Rightarrow 24a = 24$ ,  $24b = 144$ ;  $a = 2$ ,  $b = 5 \Rightarrow 48$  și  $120$ ;  $a = 3$ ,  $b = 4 \Rightarrow 72$  și  $96$ . §32). a). dacă c.m.m.d.c. este 2  $\Rightarrow$  numerele sunt multiplu de 2  $\Rightarrow$  sunt pare  $\Rightarrow$  căutăm două numere pare cu produsul 48  $\Rightarrow 24$  și  $2$ ;  $12$  și  $4$ ;  $6$  și  $8$ ; dar și  $12$  și  $4$  au c.m.m.d.c. = 4  $\Rightarrow$  rezultatele corecte 24 și 2; 6 și 8; (astfel: c.m.m.d.c. = 2  $\Rightarrow 2a$  și  $2b$  sunt cele două numere unde  $b$  și  $a$  sunt prime între ele  $\Rightarrow 2a \cdot 2b = 4ab = 48 \Rightarrow ab = 12 \Rightarrow a = 1$  și  $b = 12$ ;  $a = 3$  și  $b = 4 \Rightarrow$  numerele = 2 și 24, 6 și 8); b). la fel  $\Rightarrow 2, 2, 24$ ;  $2, 4, 12$ ;  $4, 4, 6$ ;  $2, 6, 8$ . §37) 24. §38) 3. \*\*\* §42). a).  $a + 3b + 9c = 111$  cum  $3b, 9c$  și  $111$  se divid cu 3  $\Rightarrow a$  se divide cu 3, dar  $a$  prim  $\Rightarrow a = 3 \Rightarrow 3 + 3b + 9c = 111 \Rightarrow 3b + 9c = 111 - 3 \Rightarrow 3(b + 3c) = 108 \Rightarrow b + 3c = 36$  cum  $3c$  și  $36$  se divid cu 3  $\Rightarrow b$  se divide cu 3, dar  $b$  este prim  $\Rightarrow b = 3 \Rightarrow 3 + 3c = 36 \Rightarrow 3c = 36 - 3 \Rightarrow 3c = 33 \Rightarrow c = 11$ ; b). la fel  $a = 5$ ,  $b = 7$ ,  $c = 3$ ; c). la fel  $a = 5$ ,  $b = 2$ ;  $c = 13$ . §43) a)  $2^n + 2^{n+1} = 2^n + 2^n = 2^n(1 + 2) = 2^n \cdot 3$ ; b)  $2^{2n} + 2^{2n+2} = 2^{2n} + 4 \cdot 2^{2n} = 5 \cdot 2^{2n}$ ; c)  $4^n - 2^{2n+2} = 4^n - 4 \cdot 4^n = -3 \cdot 4^n$ ; d)  $2^{2n} - 2^{2n} = 0$ ; e)  $2^{2n} - 2^{2n} = 0$ ; f)  $2^{2n} - 2^{2n} = 0$ ; g)  $2^{2n} - 2^{2n} = 0$ ; h)  $2^{2n} - 2^{2n} = 0$ ; i)  $2^{2n} - 2^{2n} = 0$ ; j)  $2^{2n} - 2^{2n} = 0$ ; k)  $2^{2n} - 2^{2n} = 0$ ; l)  $2^{2n} - 2^{2n} = 0$ ; m)  $2^{2n} - 2^{2n} = 0$ ; n)  $2^{2n} - 2^{2n} = 0$ ; o)  $2^{2n} - 2^{2n} = 0$ ; p)  $2^{2n} - 2^{2n} = 0$ ; q)  $2^{2n} - 2^{2n} = 0$ ; r)  $2^{2n} - 2^{2n} = 0$ ; s)  $2^{2n} - 2^{2n} = 0$ ; t)  $2^{2n} - 2^{2n} = 0$ ; u)  $2^{2n} - 2^{2n} = 0$ ; v)  $2^{2n} - 2^{2n} = 0$ ; w)  $2^{2n} - 2^{2n} = 0$ ; x)  $2^{2n} - 2^{2n} = 0$ ; y)  $2^{2n} - 2^{2n} = 0$ ; z)  $2^{2n} - 2^{2n} = 0$ . §44) a)  $aba = 100a + 10b + a = 101a + 20a = 121a$ ; b)  $11$ . §45).  $132 = 11 \cdot 2^2 \cdot 3$ ;  $378 = 2 \cdot 3^3 \cdot 7$ , c.m.m.d.c. =  $2 \cdot 3 = 6 \Rightarrow \frac{132}{6} = 22$ ,  $\frac{378}{6} = 63 \Rightarrow x \in \{1, 3, 7, 9\}$ .

### Capitolul III : Numere raționale pozitive

Aducerea fracțiilor la același numitor : \* §1). a).  $\frac{4}{6}, \frac{5}{6}, \frac{21}{6}$ ; b).  $\frac{25}{10}, \frac{2}{10}, \frac{7}{10}$ ; c).  $\frac{3}{12}, \frac{18}{12}, \frac{4}{12}$ ; d).  $\frac{7}{12}, \frac{8}{12}, \frac{18}{12}, \frac{10}{12}$ .

e).  $\frac{8}{28}, \frac{6}{28}, \frac{7}{28}$ ; f).  $\frac{8}{24}, \frac{30}{24}, \frac{3}{24}$ ; g).  $\frac{15}{20}, \frac{10}{20}, \frac{14}{20}$ ; h).  $\frac{3}{28}, \frac{20}{28}, \frac{22}{28}$ ; i).  $\frac{9}{21}, \frac{7}{21}, \frac{5}{21}$ ; j).  $\frac{3}{15}, \frac{10}{15}, \frac{4}{15}$ ; k).  $\frac{8}{24}, \frac{9}{24}, \frac{20}{24}$ ;  
 l).  $\frac{25}{30}, \frac{21}{30}, \frac{15}{30}, \frac{40}{30}$ ; m).  $\frac{28}{35}, \frac{1}{35}, \frac{10}{35}$ ; n).  $\frac{2}{24}, \frac{7}{24}, \frac{3}{24}$ ; o).  $\frac{4}{36}, \frac{24}{36}, \frac{18}{36}, \frac{45}{36}, \frac{66}{36}$ ; p).  $\frac{4}{22}, \frac{11}{22}, \frac{3}{22}$ ; q).  $\frac{7}{56}, \frac{12}{56}, \frac{10}{56}, \frac{8}{56}$ ;  
 r).  $\frac{1}{24}, \frac{16}{24}, \frac{15}{24}, \frac{14}{24}$ ; s).  $\frac{6}{48}, \frac{15}{48}, \frac{16}{48}$ ; t).  $\frac{16}{12}, \frac{6}{12}, \frac{9}{12}$ ; u).  $\frac{30}{36}, \frac{18}{36}, \frac{27}{36}$ ; v).  $\frac{4}{20}, \frac{30}{20}, \frac{5}{20}$ ; w).  $\frac{3}{10}, \frac{4}{10}, \frac{25}{10}$ ; x).  $\frac{28}{36}, \frac{11}{36}, \frac{15}{36}, \frac{81}{36}, \frac{26}{36}$ ; y).  $\frac{21}{36}, \frac{32}{36}, \frac{40}{36}$ ;  
 z).  $\frac{18}{18}, \frac{18}{18}, \frac{18}{18}$ ; aa).  $\frac{26}{30}, \frac{7}{30}, \frac{48}{30}, \frac{15}{30}$ ; ab).  $\frac{9}{48}, \frac{36}{48}, \frac{30}{48}, \frac{8}{48}, \frac{72}{48}$ ; ac).  $\frac{28}{36}, \frac{11}{36}, \frac{15}{36}, \frac{81}{36}, \frac{26}{36}$ ; ad).  $\frac{21}{36}, \frac{32}{36}, \frac{40}{36}$ ; ae).  $\frac{14}{44}, \frac{36}{44}, \frac{196}{44}$ ; af).  $\frac{6}{12}, \frac{9}{12}, \frac{10}{12}, \frac{8}{12}$ ; ag).  $\frac{9}{12}, \frac{4}{12}, \frac{14}{12}, \frac{30}{12}$ ; ah).  $\frac{3}{100}, \frac{42}{100}, \frac{12}{100}, \frac{45}{100}$ ; ai).  $\frac{65}{196}, \frac{21}{196}, \frac{16}{196}, \frac{36}{196}$ ; aj).  $\frac{10}{44}, \frac{36}{44}, \frac{44}{44}, \frac{75}{44}$ ; ak).  $\frac{24}{12}, \frac{3}{12}, \frac{18}{12}, \frac{32}{12}$ ; al).  $\frac{90}{100}, \frac{35}{100}, \frac{48}{100}, \frac{82}{100}, \frac{13}{100}$ ;  
 am).  $\frac{120}{36}, \frac{165}{36}, \frac{140}{36}, \frac{300}{36}, \frac{102}{36}$ ; an).  $\frac{1}{360}, \frac{2}{360}, \frac{5}{360}, \frac{4}{360}, \frac{3}{360}$ ; ao).  $\frac{1}{6} < \frac{2}{3} < \frac{5}{4}$ ; ap).  $\frac{2}{9} < \frac{5}{6} < \frac{3}{2}$ ; aq).  $\frac{3}{7} < 1 < \frac{15}{14} < \frac{5}{2}$ ; ar).  $\frac{7}{6} < \frac{9}{4} < \frac{5}{2} < \frac{10}{3}$ .

$$e). \frac{17}{600} < \frac{13}{300} < \frac{8}{150} < \frac{11}{200}; f). \frac{2}{33} < \frac{29}{165} < \frac{13}{55}.$$

**Introducerea și scoaterea întregilor :** \* §2). a).  $10 : 7$  ne dă câtul 1 rest 3  $\Rightarrow \frac{10}{7} = 1\frac{3}{7}$ ; b).  $1\frac{1}{2}$ ; c).  $2\frac{2}{5}$ ; d).  $2\frac{4}{7}$ ; e).  $8\frac{1}{3}$ ; f).  $9\frac{1}{3}$ ; g).  $3\frac{14}{30}$ .

**Ordonarea numerelor raționale :** \* §1). a).  $\frac{3}{4} < \frac{5}{8}$ ; b).  $\frac{3}{8} < \frac{5}{8}$ ; c).  $\frac{4}{3} > \frac{4}{5}$ ; d).  $\frac{7}{2} > \frac{7}{3}$ ; e).  $\frac{3}{4} > \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$ ; f).  $\frac{4}{3} > \frac{6}{5}$ ; g).  $2\frac{1}{3} > 2\frac{1}{5}$ ; h).  $3\frac{4}{9} < 3\frac{5}{10}$ ; i).  $5\frac{9}{12} = 5\frac{6}{8}$ ; j).  $6\frac{1}{2} > 5\frac{3}{4}$ ; k).  $\frac{13}{3} < \frac{27}{4}$ . \*\* §2). a). F; b). A; c). A; d). A; e). A; f). A; g). A; h). F; i). A. §3). a).  $\frac{1}{8} < \frac{1}{6} < \frac{1}{4} < \frac{1}{3} < \frac{1}{2}$ ; b).  $\frac{1}{5} < \frac{3}{5} < 2 < \frac{12}{5} < 3\frac{1}{5} < \frac{41}{5}$ ; c).  $\frac{7}{15} < \frac{2}{3} < \frac{4}{5}$ ; d).  $\frac{1}{4} < \frac{5}{16} < \frac{3}{8} < 1 < \frac{7}{2}$ ; e).  $\frac{1}{10} < \frac{4}{15} < \frac{7}{10} < 1 < \frac{1}{10} < \frac{6}{5}$ . §4). a).  $\frac{x}{2} < \frac{7}{2} \Rightarrow x < 7 \Rightarrow$

$x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ; b).  $x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ; c).  $x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ; d).  $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ; e).  $x \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$ ; f).  $x + 2 \leq 5 \Rightarrow x \leq 3 \Rightarrow x \in \{0, 1, 2, 3\}$ ; g).  $x + 5 \leq 7 \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow x \in \{0, 1, 2\}$ ; h).  $3x \leq 9 \Rightarrow x \in \{0, 1, 2, 3\}$ ; i).  $3x \leq 6 \Rightarrow x \in \{1, 2\}$ ; j).  $\frac{x}{4} < \frac{10}{4}$ ; k).  $\frac{2x}{6} < \frac{7}{6} \Rightarrow 2x < 7 \Rightarrow x \leq \frac{7}{2} \Rightarrow x \in \{0, 1, 2, 3\}$ ; l).  $\frac{6}{9} \leq \frac{x}{9} \Rightarrow x \leq 6 \Rightarrow x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ; m).  $\frac{7}{4} > \frac{2x}{4} \Rightarrow 2x < 7 \Rightarrow x \in \{0, 1, 2, 3\}$ ; n).  $\frac{2x}{6} < \frac{21}{6} \Rightarrow x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ .

**Adunarea și scăderea în Q :** \* §2) a) 11/12; b) 22/5; c) 53/12; d) 7/2; e) 8/15; f) 68/9; g) 1/2; h) 1/6; i) 143/24; j) 35/18; k) 149/84. \*\* §7). a). A; b). F; c). A; d). A; e). F; f). A. §8). a).  $\frac{7}{12}$ ; b).  $\frac{7}{6}$ ; c).  $\frac{5}{16}$ ; d).  $\frac{21}{8}$ ; e).  $\frac{14}{20} = \frac{7}{10}$ ; f).  $\frac{1}{24}$ ; g).  $\frac{95}{21}$ ; h).  $\frac{9}{12} = \frac{3}{4}$ ; i).  $\frac{30}{22} = \frac{15}{11}$ ; j).  $\frac{1}{2}$ ; k).  $\frac{1}{2}$ ; l).  $\frac{91}{30}$ ; m).  $\frac{1}{5}$ ; n).  $\frac{37}{40}$ . §9). a).  $\frac{1}{2}$ ; b).  $\frac{1}{30}$ ; c).  $\frac{9}{40}$ ; d).  $\frac{1}{2}$ ; e).  $\frac{14}{5}$ . §12).  $8\frac{1}{2}$  litri. §13).  $\frac{5}{27}$ . §14).  $7\frac{2}{6}$ . §15).  $\frac{4}{11}$ . \*\*\* §16). a). a = 4; b). a = 3; c). a = 5.

**Împărțirea :** \* §1). a). 2; b). 15; c).  $\frac{1}{8}$ ; d).  $\frac{11}{10}$ ; e).  $\frac{2}{3}$ ; f). 40; g). 3; h).  $\frac{31}{100}$ ; i). 10; j).  $\frac{2}{3}$ ; k).  $\frac{3}{2}$ ; l). 2; m). 3; n). 35; o).  $\frac{98}{53}$ ; p).  $\frac{3}{16}$ ; r).  $\frac{4}{3}$ ; s).  $\frac{8}{5}$ . §2). a).  $\frac{3}{2}$ ; b). 6; c). 6; d).  $\frac{1}{12}$ ; e).  $\frac{1}{4}$ ; f).  $\frac{1}{21}$ ; g).  $\frac{3}{2}$ ; h).  $\frac{1}{10}$ ; i).  $\frac{2}{3}$ ; j).  $\frac{18}{5}$ ; k).  $\frac{2}{7}$ ; l).  $\frac{2}{3}$ .  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6} = \frac{5}{6} : \frac{5}{6} = 1$ ; b).  $\frac{1}{7}$ ; c).  $\frac{3}{2}$ ; d). 3; e).  $\frac{4}{27}$ ; f).  $\frac{3}{2}$ ; g). 25; h).  $\frac{7}{2}$ ; i). 1; j).  $\frac{19}{3}$ ; k).  $\frac{25}{7}$ .

**Ordinea efectuării operațiilor :** \*\* §1) a) 2; b) 3/2; c) 43/11; d) 1/2; e) 249/10; f) 17/18; g) 5/28; h) 2/27. §3). 92. §6) a) 5,96; b) 1,81; c) 1,82; d) 0,51; e) 0,98; f) 1,32; g) 0,85; h) 17,64; i) 3,7; j) 1,085; k) 0,48; l) 15. §7) a) 4; b) 0,23; c) 1; d) 0,05; e) 0,2; f) 0,5; g) 8/11 = 0,7(27); h) 1; i) 10/18 = 0,(5); j) 0; k) 0; l) 9. §8) a) 23; b) 0,21; c) 16/7; d) 3,2; e) 10/9; f) 5; g) 0,06; h) 5,7; i) 1; j) 2/3. §9) a) 7; b) 1/2; c) 1; d) 37/36; e) 3; f) 34/5; g) 15/11. §10) A = {11}; B = {5; 7; 11; 13}; C = {12; 15}; D = {2; 5; 8}; (A - B)  $\cup$  (C  $\cap$  D) =  $\emptyset$ ; (B  $\cap$  D)  $\cup$  (A  $\cap$  B) = {11}; (C - A) - (C - B) =  $\emptyset$ . §11) 3/5 și 8/5. §12) 21. §17). x = 19. §19).  $\frac{34}{103}$ . §20). x = 29.

**Fracții periodice :** \* §1). a). 0,(6); b). 2,(3); c). 0,(4); d). 2,1(6); e). 0,0(6); f). 1,(428571); g). 0,(27); h). 0,2(27); i). 0,3(8); j). 0,69(4); k). 0,91(6). §2).  $\frac{2}{9} : \frac{8}{9} = \frac{4}{9}$ ;  $\frac{4}{9} : \frac{14}{99} = \frac{7}{99}$ ;  $\frac{7}{99} : \frac{3}{11} = \frac{49}{99}$ ;  $\frac{49}{99} : \frac{141}{330} = \frac{7}{330}$ .

**Media aritmetică ponderată :** \*\* §2). a) 9; b). 6; c). 7; d). 8. §3). 7,5. §4) 18,125 lei. §5) 10. §6) 9. §7) 56,(6) km/h. §8) 2,6 lei. §9). 1,355 m. §10). 8 minute. §11). 6 și 3. §12). 111. §13) 6; 3. §14) 111.

**Ecuatii :** \*\* §1). a).  $\frac{3}{5}$ ; b). 0; c).  $\frac{2}{3}$ ; d).  $\emptyset$ ; e).  $\frac{3}{5}$ ; f).  $3\frac{1}{2}$ ; g).  $\emptyset$ ; h).  $\emptyset$ . §2). a).  $\frac{7}{4}$ ; b).  $\frac{5}{8}$ ; c).  $\frac{7}{9}$ ; d).  $\frac{1}{3}$ ; e).  $1\frac{1}{4}$ ; f).  $4\frac{3}{8}$ ; g).  $\frac{1}{2}$ ; h).  $\frac{1}{24}$ ; i).  $\frac{1}{5}$ ; j).  $\frac{2}{3}$ ; k). 6; l). 30; m). 2; n). 6; o).  $\frac{5}{7}$ . §3). a).  $\frac{3}{4}$ ; b). 11; c).  $\frac{1}{10}$ ; d).  $\frac{20}{3}$ ; e).  $\frac{13}{90}$ ; f).  $\frac{1}{55}$ ; g).  $\frac{12}{92}$ ; h).  $\frac{5}{9}$ ; i).  $\frac{7}{12}$ ; j).  $1\frac{7}{24}$ ; k).  $\frac{1}{8}$ ; l).  $\frac{3}{2}$ ; m). 15; n).  $\frac{5}{24}$ ; o).  $\frac{5}{28}$ . §4). a).  $\frac{1}{19}$ ; b).  $\frac{15}{2}$ ; c).  $\frac{1}{9}$ ; d). 23; e).  $\frac{2}{11}$ ; f).  $\frac{3}{4}$ ; g). 0; h). 1. \*\*\* §6). a).  $\frac{37}{16}$ ; b).  $\frac{3}{5}$ ; c). 0; d).  $\frac{1}{8}$ ; e).  $\frac{17}{4}$ ; f). 1; g).  $\frac{5}{4}$ ; h). 3; i).  $\frac{1}{8}$ ; j).  $\frac{3}{8}$ . §7). a). 5; b).  $\frac{75}{14}$ ; c). 7; d).  $\frac{9}{2}$ ; e).  $\frac{84}{11}$ ; f).  $\frac{5}{6}$ ; g).  $\frac{10}{39}$ ; h). 3; i).  $\frac{29}{12}$ ; j).  $\frac{1}{2}$ ; k).  $\frac{180}{7}$ ; l). 18; m). 8; n). 2; o). 20; p). 6; r). 0.

**Probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor :** §1). 11 răuște. §2). 18 premii. §3). 489 kg. §4). 75 kg. §5). 24 litri. §6). 36 km. §7). a).  $\frac{2}{5} \cdot x = 8 \Rightarrow x = 8 \cdot \frac{5}{2} = 20$ ; b).  $\frac{17}{2}$ ; c). 1. §8). a).  $16 \cdot \frac{3}{2} = 24$ ; b). 30; c). 15. §9).



$\frac{1}{2} \cdot 54 \cdot \frac{9}{4} = \frac{243}{4}$ ; b).  $\frac{28}{3}$ ; c). 45; d).  $\frac{15}{4}$ . §10). a).  $1\frac{7}{8}$ ; b).  $4\frac{29}{40}$ ; c).  $\frac{73}{27}$ ; d).  $\frac{1}{2}$ ; e).  $\frac{7}{8}$ . §11). a). dacă unul este  $x \Rightarrow x + \frac{3}{8}$  este al doilea  $\Rightarrow x + x + \frac{3}{8} = 30\frac{1}{2} \Rightarrow x = \frac{241}{16}$  și  $\frac{247}{16}$ ; b).  $x =$  suma de bani,  $x - 2000\frac{1}{2} + x = 10000 \Rightarrow x = \frac{24100}{4}$ . §12).  $1673 \cdot \frac{8}{7} = 1912$  lei; §13).  $24 \cdot \frac{3}{2} = 36$  elevi. §14).  $12 \cdot \frac{7}{6} = 14$ . §15).  $324 \cdot \frac{17}{4} = 891$  ha. §16).  $4 \cdot \frac{9}{2} = 18$  litri lapte. §17).  $33 \cdot \frac{12}{11} = 36$  kg grâu. §18). notăm cu  $x =$  suma pe care a avut-o  $\Rightarrow \frac{2}{3}x + 700 = x \Rightarrow x = 2100$  lei a avut și  $2100 - 700 = 1400$  a cheltuit. §19).  $12 + \frac{4}{7}x = x \Rightarrow 28$  km;  $28 - 12 = 16$  km. §20).  $\frac{3}{5}x + 12 = x \Rightarrow x = 30$ ;  $30 - 12 = 18$  băieți. §21).  $15 + \frac{1}{6}x = x \Rightarrow x = 18$ ;  $18 - 15 = 3$ . §22).  $\frac{1}{11}x + 30 = x \Rightarrow x = 33$ ;  $33 - 30 = 3$  corijenți. §23).  $\frac{2}{15}x + \frac{4}{9}x + 19 - x = x \Rightarrow x = 45$ . §24).  $\frac{3}{7}x + \frac{2}{5}x + 720 = x \Rightarrow x = 4200$ . §25). I zi:  $\frac{1}{5}x$ ; restul  $x - \frac{1}{5}x = \frac{4}{5}$ ; II zi:  $\frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5}x = \frac{1}{5}x \Rightarrow \frac{1}{5}x + \frac{1}{5}x + 1800 = x \Rightarrow x = 3000$ . §26). Dacă notăm vârsta ci  $x \Rightarrow \frac{3}{4}x$  celălalt  $\Rightarrow x + \frac{3}{4}x = 21 \Rightarrow x = 12$ ,  $21 - 12 = 9$ . §27).  $X =$  unul,  $\frac{5}{6}x$  este celălalt  $\Rightarrow x - \frac{5}{6}x = 24 \Rightarrow x = 144$ ,  $144 \cdot \frac{5}{6} = 120$ . §28).  $x$  numărul  $\Rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}x = 420 \Rightarrow x = 630$ . §29).  $\frac{2}{7} \cdot 1960 = 560$ ;  $1960 - 560 = 1400$ . §30).  $x =$  drumul,  $270 = \frac{3}{5}x \Rightarrow x = 450$ ; I zi =  $\frac{2}{9} \cdot 450 = 100$ , II zi = 280, III zi =  $450 - 100 - 270 = 80$  km. §31).  $\frac{2}{3} \cdot 36 = 24$  la muzeu,  $\frac{3}{4} \cdot 36 = 27$  la teatru. Cel mai mare număr de elevi care merg la muzeu și la teatru = 24 elevi. Cel mai mic =  $-36 - 27 - 9$  elevi care nu au fost la teatru dar au fost la muzeu  $\Rightarrow 24 - 9 = 15$  care au fost și la teatru și la muzeu. §32).  $\frac{1}{2} \cdot 102 + \frac{3}{17} \cdot 102 - 51 + 18 = 69$ . §33).  $x =$  drumul  $\Rightarrow \frac{3}{7}x + 10 = \frac{1}{2}x \Rightarrow x = 140$  km. §34).  $x =$  suma de bani  $\Rightarrow \frac{4}{9}x + 1500 = \frac{1}{2}x \Rightarrow \frac{1}{2}x \Rightarrow x = 27000$  lei. §35).  $x =$  norma  $\Rightarrow \frac{4}{10}x + 112 = x - \frac{1}{3}x \Rightarrow x = 420$  piese. §36).  $x =$  suprafața  $\Rightarrow \frac{3}{5}x + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5}x + 456 = x \Rightarrow x = 1710$  ha. §37). a).  $x =$  numărul  $\Rightarrow \frac{3}{10}x = 20 + \frac{1}{5}x \Rightarrow x = 200$ . §38). 20 l. §39). 70 ani; 40 ani.

#### Capitolul IV : Modele de lucrări semestriale semestrul I

Testul 1 : I. §1). a). A; b). F; c). A; d). F; e). A; f). A. §2). a). {0; 2; 6; 8}; b).  $45^\circ$ ; c). punctul care împarte segmentul în două segmente egale. II. §3). a). 1; b). 0,5. §4). a). 5; b). nu are soluție în Q. §5). 234; 432; 630; 738; 936. §6).  $68^\circ$ ;  $70^\circ$ ;  $72^\circ$ ; 74;  $76^\circ$ . §7).  $37-18^\circ$ ;  $37^\circ$ . §8). a).  $160^\circ$  și  $20^\circ$ ; b).  $100^\circ$ . Testul 2 : I. §1). a). F; b). F; c). A; d). A; e). A; f). A. §2). a).  $7^\circ 57' 34''$ ; b). c.m.m.d.c. este 1; c). împarte unghiul în alte două unghiuri de măsuri egale. II. §3). a).  $\frac{2}{3}$ ; b).  $\frac{5}{3}$ . §4). a).  $\frac{15}{7}$ ; b).  $\frac{28}{21}$ ; c).  $\frac{11}{3}$ . §5). 5724. §6).  $72^\circ$ . §7).  $10^\circ - 1 = 9$ ; 99; 999; ... care sunt divizibile cu 9. §8). a).  $10^\circ$ ; b).  $5^\circ$ . Testul 3 : I. §1).  $\frac{8}{8}$ . §2).  $\frac{11}{48}$ . §3).  $1\frac{3}{4}$ . §4).  $\frac{8}{9}$ . §5).  $105^\circ 44' 2''$ . §6).  $x \in \{2; 6\}$ . §7). 6 cm. §8). 144. II. §9).  $\frac{21}{2}$ . §10). 8 cm. §11).  $130^\circ$ . Testul 4 : I. §1). 34. §2). 528. §3).  $11^\circ 46' 24''$ . §4). 14 cm. §5).  $\frac{2}{6}$ . §6). A. §7).  $x \in \{1; 3; 13\}$ . §8). 3, (237)  $< 3,2(37) < 3,23(7)$ . II. §9). (a; b)  $\in \{(7; 77) (35; 49); (77; 7)\}$ . §10).  $95^\circ 30'$ . §11). MP = 11 cm.

#### Capitolul V : Rapoarte și proporții

Raport : \*\* §1) a) 0,6; b) 2,5; c) 7,5; d) 0,5; e) 0,2; f) 0,05; g) 2,25; h) 0,25; i) 0, (148); j) 2, (7); k) 0,5625; l) 0, (54). §2) a) 15; b) 2; c) 4. §3) a) 4; b) 792; c) 40. §4) P = 42 cm, A = 90 cm<sup>2</sup>. §5) a) 14/10; b) 10/14; c) 48/14; d) 2. §6) a) 3; b) L/l = 4/3; c) 16; d) 2/7. §7) 14,25. §8) a) 1/5; b) 4 și 1/4; c) 1/3 și 3. §9) a) 8/3; b) 4; c) 1/2. §10) 3/5 și 9/25. §11) 1/2. §12) 4/7 și 7/4. §13) 10/9. §14) 3/10. §15) 12/7. §16) 12/5.

Proporție : \* §1) a) Da; b) Da; c) Nu; d) Da; e) Nu; f) Nu; g) Da; h) Da; i) Da. §2) a) Nu; b) Da; c) Nu; d) Da; e) Da; f) Da. \*\* §3) ex:  $1/2 = 4/8$ ;  $3/4 = 9/12$ ;  $6/3 = 0,12/0,06$ ;  $3/4 = 0,25/0,03$ . §4) ex: a)  $2/3 = 4/6$ ; b)  $3/6 = 4/8$ ; c)  $4/12 = 5/15$ ; d)  $24/6 = 8/2$ ; e)  $6/2 = 15/5$ ; f)  $4/8 = 6/12$ ; g)  $3/16 = 9/48$ ; h)  $12/4 = 36/12$ ; i)  $0,12/0,6 = 8/40$ ; j)  $0,7/0,3 = (1/9)/(1/21)$ . §5) a) 5/2; b) 2; c) 2; d) 100 și 10. §6) 6. §7) 180. §8) 9/10. §9) 2/3. §10) 3/4.

Aflarea unui termen necunoscut al unei proporții : \* §1) a) 12; b) 15; c) 0,5; d) 3; e) 15; f) 5/4; g) 8; h) 9/2; i) 2/33. \*\* §2) a) 36; b) 5; c) 7/8; d) 16; e) 13; f) 3/8; g) 3/40; h) 1/10. §3) a) 10/9; b) 13/8; c) 3; d) 161; e) 2; f) 2; g) 2; h) 7/36; i) 4; j) 1.

§4) a) 3; b) 2; c) 9/2; d) 1/5; e) 1/24. \*\*\* §5) a) 27; b) 15; c) 26; d) 11/10; e) 5. §6) a) 5/7; b) 10; c) 135; d) 2.

**Proportii derivate :** \* §1) a)  $2/14 = 5/35$ ;  $35/5 = 14/2$ ;  $5/2 = 35/14$ ; b) ex:  $(20 + 48) / 48 = (60 + 144) / 144$ , etc. \*\* §2) a) 4/19; b) 22/10; c) 2/10; d) 55/61; e) 10/11; f) 2/4. §3) a) 3/2; b) 2/1; c) 2/3; d) 6/8; e) 1/2. §4) a) 5; b) 7; c) 5; d) 2. §5) 28 si 36. §6) 12 si 30 §7) 42 si 18. §8) 54 cm<sup>2</sup>. §9) a) 6/15; b) 90 cm<sup>2</sup>. §10) 24 si 39; 39/6. §11) a) 6/5; b) 130 si 156. §12) 8 si 12. §13) a) 3; b) 3; c) 3. §14) 15. §15) 4/11 si 6/11.

**Procente :** \* §1) a) 105/2; b) 507/20; c) 9; d) 420; e) 201. §2) 252 kg. §3) 1 exercitiu a rezolvat si 19 exercitii mai are de rezolvat. \*\* §4) a) 6; b) 3/5; c) 88. §5) 95%; 285 kg. §6) 3,5 kg. §7) 2,43 km. §8) 350 lei si 5724,5 lei. §9) 189 cm<sup>2</sup>. §10) 50,6 lei. §11) 1.725 lei. §12) 29 piese. §13) 9 exercitii. §14) 49,5 lei. §15) a) 1% < 1,2%; b) 8% > 7,5%; c) 25% a > 80% b; d) 15% a > 12% a; e) 64% a > 63% a.

**Aflarea unui număr când se cunoaște p% din el :** \* §1) a) 90; b) 30; c) 3000. §2) 175 lei. §3) 36 adică 72%. §4) 24 elevi. §5) 32 elevi. \*\* §6) 35. §7) 34. §8) 10. §9) 2000 lei. §10) 800 lei. §11) 3,5 lei. §12) 42,5 lei. §13) 15 ex. §14) 80 km, 20 km. §15) a) 600 kg, 1100 kg, 300 kg; b) 600 kg; c) 700/3 kg. §16) 30 elevi. §17) 45. §18) A = 600cm<sup>2</sup>. \*\*\* §19) 6000 lei. §20) 200 lei.

**Aflarea raportului procentual :** \* §1) a) 40%; b) 125%. §2) 80% si 20%. \*\* §3) 20%. §4) 36%. §5) 30%, 50% si 20%. §6) 5%. §7) 37,5%. §8) a) 80%; b) 500/9%.

**Probabilități :** \* §1) a) 1/6; b) 3/6; c) 3/6; d) 3/6; e) 4/6; f) 2/6; g) 2/6. §2) a) 8/30; b) 6/30; c) 10/30.

\*\* §3) 6/21; b) 6/21; c) 6/21; d) 6/21; e) 14/21. §4) a) 1) 2/10; 2) 1/10; 3) 3/10; 4) 4/10; b) 1) 10/45; 2) 9/45; c) 1) 20/55; 2) 10/55; 3) 34/55. §5) 114 si 314. §6) a) 1/10; b) 7/10; c) 2/10; d) 6/10; e) 4/10. §7) a)  $\frac{12}{30} \cdot \frac{11}{29} = \frac{132}{870}$

**Proportionalitate directă :** \* §1) a) Da; b) Nu; c) Da; d) Da; e) Da. \*\* §2) a) 9 si 6; b) 12 si 24; c) 20, 15 si 8; d) 2/5 si 3/7; e) 1/4 si 1; f) 36 si 27; g) 6 si 5; h) 3,25 si 4. §3) 36. §4)  $2/18 = 1/9$ . §5) 4,5. §6) 4732 cm<sup>2</sup>. §7) 20,46 si 29. §8) 2 si 5; 4 si 10; 6 si 15. §9) 20 si 25. §10) 6,9 si 15. §11) 80. \*\*\* §12) 28,16 si 72. §13) 8 si 12. §14) 15 si 18.

**Proportionalitate inversă :** \* §1) a) Da; b) Da; c) Da; d) Nu; e) Da. \*\* §2) a) 14; b) 6 si 12; c) 7 si 7/2; d) 3/2; 2,5; 3; e) 8/9; 7/9; 3/5; f) 42 si 70; g) 3, 5, 4; h) 8/5; 6/5; 12/5; i) 3 si 11. §3) a) 3/4 si 1/2; b) 4 si 30; c) 48, 162 si 104; d) 3, 14, 12. §4) 6, 4, 3. §5) 300 cm<sup>2</sup>. \*\*\* §6) 24 si 18; §7) 25 si 20.

**Regula de trei simplă :** \*\* §1) 9,375 kg. §2) 10 ore, 5 muncitori. §3) 21 piese. §4) 255 ouă. §5) 10 zile. §6) 325000 lei. §7) 8 șoriceți, 6 zile. §8) 9 iepuri. §9) 6 ore si 40 minute. §10) 80 km; 12 litri. §11) 7,5 kg si 5 kg. §12) 14,4 kg si 0,4 kg. §13) 80 km/h. §14) 333,3 km. §15) 4 ore si 72 km/h. §16) 0,6 kg si 42 kg. §17) 3. §18) 20 kg si 9 kg. §19) 20 pomi.

**Împărțirea unui număr în părți direct sau invers proporționale cu mai multe numere date :**

\* §1) 26, 52, 91. §2) 3,2; 4,8; 5,6. §3) 20/3, 25/6, 5, 15/4. §4) 90, 60, 36. §5) 6, 24, 8. §6) 12, 60, 6. §7) 150, 225, 250. §8) 15, 10, 25, 20. \*\* §9) a) 21, 28, 35; b) 6, 8, 10; c) 3, 4, 5; d) 6, 8, 10; e) 4, 16/3, 20/3. §10) a) 60, 80, 120; b) 35/2, 70/3, 35; c) 15, 20, 30; d) 9, 12, 18. §11) 20, 30, 40. §12) 24, 40, 56. §13) 1680 cm<sup>2</sup>. §14) 5, 6, 7. §15) 15, 18, 27, 30. §16) 12, 24, 30, 36. §17) 32 lei; 48 lei; 72 lei. §18) 12, 20, 16, 12, 24, 28. §19) 8, 9, 10. §20) 15 ore si 21 ore; 22,5 lei, 37,5 lei, 52,5 lei. §21) 60 lei, 50 lei. §22) 76 m, 240 lei, 360 lei, 160 lei.

**Exerciții recapitative :** §1) 3. §2) 2/5. §3) a) 9; b) 0,8; c) 2; d) 5; e)  $2^{15} + 3$ ; f) 6/5; g) 5/2; h) 4/5; i) 0,09. §4) a) 165; b) 2; c) 64. §5) a) 0; b) 2. §6) 12 si 32. §7) 90 si 126. §8) 15 si 20. §9) 11/8. §10) 3; 6; 3. §11) a) 18; 24; 10; b) 162; 216; 90; c) 30; 40; 50/3; d) 9; 12; 5. §12) a) 4 si 27; b) 5 si 10/3; c) 3 si 4/21. §13) 3800 g apă. §14) 4%. §15) 200 g apă. §16) a) 2%; b) 4500 g apă. §17) a) 8 g sare; b) 10 g sare. §18) a) 10 g sare; b) 37,5%. §19) a) 72 g apă; b) 10 g sare; c) 180/13%. §20) 16 băieți si 12 fete. §21) 20 băieți si 15 fete. §22) 21 băieți si 9 fete. §23) 200 km. §24) a) 9 si 15; b) 18 si 30; c) 30 si 50; d) 24 si 40; e) 18 si 30. §25) 30 km. §26) 21 km. §27) 74 si 111. §28) 50; 200 si 30. §29) 14; 100 si 200. §30) 12, 30, 20. §31) 60, 80, 320. §32) 60%. §33) a) 62,5%; b) 80%. §34) 410 piese. §35) a) 40%; b) 24; c) 12 elevi. §36) 20 si 16. §37) a) 32 elevi; b) 6,25%, 12,5%, 6,25%; c) 25%; d) 6 elevi. §38) 115%. §39) 56,25%. §40) 20%.

## Capitolul VI : Numere întregi

§1).  $\frac{-5}{-1} \cdot \frac{-3}{-1} \cdot \frac{-10}{-1} \cdot \frac{1}{1} \cdot \frac{4}{1} \cdot \frac{6}{1}$  §2) a) 4; 0; 5; b) 4; 6/3. §3) a)  $-5 \in \mathbb{Z}$  și  $-5 \in \mathbb{N}$ ; b)  $3 \in \mathbb{Z}$  și  $3 \in \mathbb{N}$ ; c)  $0,8 \in \mathbb{Z}$  și  $0,8 \in \mathbb{N}$ . §4) B = {0, 2, 3}, C = {-5, -4, 0, 2, 3}, D = {-5, -4}.

**Valoarea absolută a unui număr întreg (modulul) :** \*\* §6) a) 3 = 3; b) 0 < 3; c) 3 < 4; d) 9 > 0; e) 9 = 9; f) 6 > 4; g) 8 < 9; h) 5 > 4; i) 10 = 10. §7) a) x = 0; b) x = 5 și x = -5; c) x = 17 și x = -17; d) x ∈ α; x = 3; x = -3; f) x ∈ α; g) x = 4 și x = -4; h) x = 10 și x = -10; i) x = 0; j) x = 9 și x = -9; k) x = 5 și x = -5; l) x = 5 și x = -5; m) x = 4 și x = -4; n) x = 6 și x = -6; o) x = 4 și x = -4.

**Adunarea și scăderea numerelor întregi :** \* §1) a) -21; b) -12; c) 8; d) -24; e) 13; f) 17; g) 26; h) -34; i) -28; j) -95; k) -191; l) -50; m) -1; n) -43; o) -21; p) -36; r) 1. §2) a) -9; b) -2; c) -15; d) -8; e) -23; f) -2; g) -26; h) -31; i) -11; j) -8; K) -7; l) -4; m) -39; n) -26; o) -15; p) -29; r) -6; s) 13; t) 9; v) -37. \*\* §3) a) -2; b) 3; c) 99; d) -14; e) 8; f) 6; g) -6; h) 1; i) -11; j) -2; k) 1; l) -1; m) -8; n) 13. §5). a). 4; b). 28; c). 1; d).  $2^{16}$ ; e).  $3^{13}$ ; f).  $-2^{11}$ ; g).  $2^{10}$ . §6)

a) -3; b) 5; c) -14; d) -9; e) -5; f) -22; g) 2; h) -16.

**Relațiile de  $<$ ,  $\leq$ ,  $\geq$ ,  $>$  între numere întregi :** \*\* §1) a)  $-2 < 5$ ; b)  $-3 < 7$ ; c)  $-5 > -6$ ; d)  $2 > -4$ ; e)  $12 < 26$ ; f)  $-8 < -6$ ; g)  $5 > 1$ ; h)  $-3 < 3$ ; i)  $4 = 4$ ; j)  $-1 = -1$ ; k)  $4 < 7$ ; l)  $-8 > -34$ ; m)  $1 > -1$ ; n)  $2 < 8$ ; o)  $2 > 1$ . §2) a) -10, -8, -5, -3, -1, 2, 6, 14; b) -2, -1, 0, 4. §3) a) 12, 4, 0, -1, -6, -8, -13, -25; b) 8, 2, -4, -5. §4) A = -17; B = -12; C = -7. §5) a) -999; b) -1000; c) -99999; d) -10. §6) 1, 0, -1, -2, -3. §7) -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2. §9) -2, -1, 0, 1, 2. §10) a)  $5 > 2$ ; b)  $6 > 3$ . §11) 1098. §12)  $-109 < -108$ . §13) -120. §14) -316. \*\*\* §15) a)  $x \in \{-3; -2; -1; 0; 1; 2; 3\}$ ; b)  $x \in \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ ; c)  $x = 0$ ; d)  $x \in \emptyset$ ; e)  $x \in \mathbb{N}$ ; f)  $x \in \emptyset$ ; g)  $x \in \{2; 3\}$ ; h)  $x \in \{-3; -2; 2; 3\}$ . §16) A =  $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ ; B =  $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ ; A - B =  $\{0, 1, 2\}$ ; B - N\* =  $\{-3, -2, -1, 0\}$ ; A  $\cap$  B = A; B - A =  $\{-3; 3\}$ . §17) A =  $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ; B =  $\{-5, -4, -3, -2, -1, 0\}$ ; C =  $\{-2, -1, 0\}$ ; A  $\cap$  B =  $\{0\}$ ; A - C =  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ; B - A =  $\{-5, -4, -3, -2, -1\}$ ; B - N\* = B; C - N =  $\{-2, -1\}$ ; A  $\cap$  N = A.

**Înmulțirea numerelor întregi :** \* §1) a) 12; b) -12; c) -16; d) 18; e) -110; f) 63; g) -32; h) 56; i) -30; j) -48; k) 54; l) -28; m) -72; n) 0; o) 4. §2) a) 12; b) 0; c) -144; d) -60; e) -24; f) -8; g) -5; h) 12; i) -88; j) 12. §3) a) -23; b) 0; c) -5; d) -25; e) 18; f) 10; g) -9; h) 10. \*\* §4) a) 5; b) 12; c) -6; d) -11; e) -22; f) -50; g) 5; h) 2. §6) a) -15; b) -6 și 6; c) -22. §8) a) 18; b) -350; c) -360; d) -1560; e) 600. §9) c. (x; y) =  $\{(1; -22); (3; -8); (7; -4); (21; -2); (-1; 20); (-3; 6); (-7; 2); (-21; 0)\}$ . §10) a.  $x = -6$ ;  $y = 5$ ; b.  $x = -7$ ;  $y = -6$ .

**Împărțirea numerelor întregi :** \* §1) a) -4; b) -5; c) 4; d) -3; e) -4; f) 3; g) -5; h) -5; i) -4; j) 3; k) 28; l) 3; m) 9; n) -7; o) -3. \*\* §3) a) -2; b) -2; c) -3; d) -3; e) -9; f) -2; g) 2; h) -20; i) 0; j) -1; k) 2; l) -2. §4) a) 3; b) 1; c) 2; d) -8; e) -13; f) -4; g) -2; h) -1; i) -1; j) -5; k) -4; l) 8; m) 6; n) 1.

**Divizorii unui număr întreg :** \* §1)  $D_{12} = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 4; \pm 6; \pm 12\}$ ;  $D_{18} = \{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6; \pm 9; \pm 18\}$ ;  $D_{20} = \{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 5; \pm 10; \pm 20\}$ . \*\* §2) a.  $\{\pm 1; \pm 7\}$ ; b.  $\{\pm 8\}$ ; c.  $\{\pm 1; \pm 5\}$ ; d.  $\{\pm 8; \pm 16\}$ ; e.  $\{\pm 1; \pm 2\}$ ; f.  $\{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8; \pm 12\}$ . §3) a.  $\{\pm 1; \pm 2; \pm 3; \pm 6\}$ ; b.  $\{\pm 1; \pm 2; \pm 4; \pm 8\}$ ; c.  $\{-2; -4; -2; -8\}$ ; d.  $\{0; -1; -2\}$ . §4) a.  $\{1; 3\}$ ; b.  $\emptyset$ ; c.  $\{0; 1; 3\}$ ; d.  $\{2\}$ . §5) a.  $\{0; 6\}$ ; b.  $\{-1; -2; -3; -6\}$ . \*\*\* §6) a.  $\{-2; 0; 2; 4\}$ ; b.  $\{-9; -3; -1; 5\}$ ; c.  $\{-4; 0; 2; 6\}$ ; d.  $\{-1; -2\}$ . §7) a. i.  $\{-3; 3\}$ ; ii.  $\{0; 3; 6; 9; 12; 15; 18\}$ ; b. i.  $\{-21; 21\}$ ; ii.  $\{0\}$ . §8) se dă factor comun. §9) se pune condiția ca  $3ab:25$  și  $3ab:3$ . §10) se pune condiția ca  $4ab:9$  și  $4ab:4$ .

**Puterea cu exponent număr natural a unui număr întreg :** \* §1) -8, 81, 81, -1, 1, 1, -1, -27, 1, 21, 1, 1, 169, -7. §4) a.  $(-3)^{10}$ ; b) 0; c) 1. §5) a. pozitiv; b. negativ. §6) a) 0; b) -1; c) 51; d) -1; e) 102. §7) a)  $-7 \cdot (-1)^k$ ; b) -2; c) k par  $\Rightarrow -9$ ; k impar  $\Rightarrow 1$ ; d) 0; e) 0. §8) a) 2; b) -1; c) 16; d) 18.

**Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor :** \*\* §5) A =  $\{-12, -6, -4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4, 6, 12\}$ ; B =  $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ ; C =  $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ ; D =  $\{5, 10, 20\}$ ; E =  $\{3, -3\}$ ; F =  $\{1, 2, 3, 6\}$ ; G =  $\{0, 1, 2, 3\}$ ; H =  $\{-6, -3, -2, -1\}$ ; I =  $\{-4, -3, -2, 2, 3, 4\}$ ; a) B - A =  $\{0\}$ ; b) A  $\cap$  B  $\cap$  F =  $\{1, 2, 3\}$ ; c) (C  $\cap$  I) - E =  $\{-2, 2\}$ ; d) (G - A)  $\cup$  C = C; e) (I - N)  $\cap$  H =  $\{-3, -2\}$ ; f) (C  $\cap$  N) - F =  $\{0\}$ . \*\*\* §6) a) 0; b) 1. §7) a)  $(-2)^{2n} \cdot 25^n = 2^{2n} \cdot 5^{2n} = 10^{2n} = (-10)^{2n}$ ; b)  $(-2)^n + (-2)^{n+1} + (-2)^{n+2} = (-2)^n [1 + (-2) + (-2)^2] = (-2)^n (-5)$ ; d)  $\frac{(-2)^n \cdot [1 - (-2)]}{3} = (-2)^n \cdot \frac{3}{3} = (-2)^n \in \mathbb{Z}$ . §8) a)  $x = -6$ ; b)  $x = 2$  și  $y = 5$  sau  $x = -2$  și  $y = 9$  sau  $x = -8$  și  $y = 3$  sau  $x = -4$  și  $y = -1$ ; c)  $x = 2$  sau  $x = -3$ ; d)  $x = 2$  sau  $x = -4$ ; e)  $x = 5$  sau  $x = -2$ ; f)  $x = -1$  sau  $x = -2$ ; g)  $x = 1$  și  $y = 2$  sau  $x = 2$  și  $y = 1$  sau  $x = -1$  și  $y = -2$  sau  $x = -2$  și  $y = -1$ ; h)  $x = 2$  și  $y = -1$  sau  $x = -2$  și  $y = 3$  sau  $x = -4$  și  $y = 1$  sau  $x = 0$  și  $y = -3$ ; i)  $x = -1$ . §9) a)  $(-2)^4 = 2^4 < 3^4$ ; b)  $(-2)^4 = 2^4 > -3^4 = (-3)^4$ ; c)  $(-2)^{51} > (-3)^{51}$ ; d)  $(-2)^{20} < (-3)^{20}$ ; e)  $(-2)^{33} = -2^{33} < 3^{22} = (-3)^{22}$ ; f)  $(-2)^{27} = (-8)^9$ ; g)  $(-2)^{10} = 2^{10} > -4^5 = (-4)^5$ ; h)  $(-3)^{18} = 3^{18} = (-27)^6 = 27^6 = (3^3)^6$ .

**Ecuatii de forma  $x + a = b$ ,  $a, b \in \mathbb{Z}$  :** \* §1) -39; b) -26; c) -13; d) -6; e) -34; f) 9; g) 5; h) -2; i) 7; j) 12; k) 8; l) 1; m) -9; n) -18; o) -3; p) -7. §2) -5. §3) -6. §4)  $x \in \emptyset$ . \*\* §6) a) 9; b) 20; c) 2; d) 18; e) 3; f) -3. §7) a) 17; b) 10; c) -2; d) -3; e) 0; f) -78; g) -4; h) -10. §8) a)  $x = 4$  și  $x = -6$ ; b)  $x = 4$  și  $x = -8$ ; c)  $x = -3$ ; d)  $x = 6$ ; e)  $x = 14$  și  $x = -2$ ; f)  $x = 23$  și  $x = -13$ ; g)  $x \in \emptyset$ ; h)  $x = 5$  și  $x = 3$ ; i)  $x = -1$  și  $x = -5$ ; k)  $x = 4$  și  $x = -4$ ; l)  $x = 7$  și  $x = 3$  și  $x = -7$  și  $x = -3$ .

## Capitolul VII : Modele de lucrări semestriale semestrul II

**Testul 1 : I.** §1) a) 3; b) 2; c) 1; d) 5. §2) a) 9; b) 75; c) 110° și 70°; d) 6 cm. II. §3) a) -2; b) -5. §4) 15 și 18. §5) 40°. §6) a) în a treia zi; b) 20. §7) a)  $\triangle ABD = \triangle ACD \Rightarrow AD$  bisectoare în  $\triangle ABC$ ; b) (AO) = (DO)  $\Rightarrow \triangle BDA$  isoscel. **Testul 2 : I.** §1) a) F; b) F; c) A; d) A; e) F. §2) a) 10; b) dreptunghic; c) isoscel; d) 60 cm². II. §3) a) 8; b)  $x \in \{-7; 5\}$ . §4) a) 7; b) -2. §5)  $\frac{1}{10}$ . §6) 100. §7) a) U.L.U.; b) se arată că  $\triangle BNM = \triangle FMN$ . **Testul 3 : I.** §1) 26. §2) 80°. §3)  $x = 27$ . §4) 24 cm. §5) 259. §6) 34°. §7)  $x \in \{-2\}$ . §8)  $x = -2$ . II. §9) -2. §11) 15 cm. **Testul 4 : I.** §1) 2. §2)  $\{-4; 5\}$ . §3) 45°. §4)  $\frac{12}{11}$ . §5) 216 cm². §6) 40. §7) 80%. §8) NP = 6 cm. II. §9) -7. §10) 111°.

## Capitolul VIII : Dreapta



\* §1)  $AB \cap CD = \{C\}$ . §2) a)  $A \in a$  și  $A \in c$ ,  $E \in c$ ,  $D \in c$  și  $D \in b$ ,  $B \in a$  și  $B \in b$ ,  $C \in a$ ; b) A, B, C  $\in a$ ; B, D  $\in b$ ; A, E, D  $\in c$ ; c) A, E, D și A, B, C; d) A, E, D, B sau A, E, D, C sau A, B, C, E sau A, B, C, D; e) B, C, D, E \*\* §3) a) Da; b) Nu; c) Nu; d) Nu; e) Nu; f) Da; g) Da. §4) a) Da; b) Nu; c) Nu; d) Da; e) Nu; f) Da. §5) coliniare. §6) 4 drepte. §7) 3 drepte. §8) a) Da; b) Da; c) Nu; d) Da; e) Nu. §10) i) coincid; ii)  $BE \cap AD = \{B\}$ ,  $BE \cap DE = \{E\}$ .

**Semidrepte și segmente :** \* §1) a) Da; b) Nu; c) Da; d) Da; e) Nu; f) Da; g) Da; h) Da; i) Nu; j) Nu; k) Nu. §2) a) Nu; b) Nu; c) Da; d) Nu; e) Da; f) Da; g) Da; h) Da; i) Nu; j) Da; k) Nu. \*\* §3) a) Da; b) Nu; c) Nu; d) Da; e) Nu; f) Da; g) Da; h) Nu; i) Da; j) Nu; k) Da. §4) a) Nu; b) Da; c) Da; d) Nu; e) Nu; f) Da; coliniare. §5) a) Da; b) Nu; c) Da; d) Nu; e) Nu; f) Da. §6) D, A, B, C sau C, A, B, D sau D, B, A, C sau C, B, A, D. §7) C, A, B, D sau C, D, B, A. §8) A, B, C. §9) C, B, A sau A, B, C. §10) C, A, B sau C, B, A. §11) B, A, C sau C, A, B. §12) A, B, C, D. §13) A, B, D, C sau A, D, B, C sau A, D, C, B. §14) B, D, C, A sau D, B, C, A. §15) A, C, B, D sau A, D, C, B. §16) A, B, C, D sau A, D, C, B.

**Lungimea unui segment. Operații cu segmente. Mijlocul unui segment :** \* §1)  $AC = 8$  cm. §2)  $BC = 1,9$  cm. §3)  $MB = 3,25$  cm. \*\* §9)  $RT = 3$  cm dacă  $R \in [ST]$  și  $RT = 7$  cm dacă  $S \in [RT]$ . §10)  $BC = 5$  cm,  $CD = 3$  cm,  $BD = 8$  cm. §11)  $GH = 2$  cm,  $FG = 3$  cm,  $EF = 7$  cm. §12)  $PR = 5$  cm,  $RB = 3$  cm,  $BE = 4$  cm,  $RE = 7$  cm,  $AB = 10$  cm,  $AE = 14$  cm. §13)  $DE = 9$  cm,  $FE = 4$  cm,  $AC = 4$  cm,  $CB = 5$  cm,  $(AC) = (BD) = (FE)$ ,  $(CB) = (DF)$ . §14)  $BC = AF : 3 = 5$  cm,  $CE = 2$  cm,  $ED = 3$  cm,  $DF = 3$  cm, D este mijloc. §15)  $AB = 4$  cm,  $CE = 5$  cm, B și E sunt mijloace. §16) a) Nu;  $MN = MP - NP$ ; b) Da; c) Nu; d) Nu; e) Da; f) Da; g) Nu; h) Da; i) Da. §17)  $AB = 6$  cm,  $BC = 7$  cm,  $AC = 13$  cm. §18)  $ST = 8$  cm,  $RM = 2$  cm,  $NT = 4$  cm,  $MN = 6$  cm. §19)  $AB = 10$  cm,  $BC = 6$  cm,  $AC = 16$  cm,  $MP = 3$  cm,  $PN = 5$  cm. §20)  $MN = 7$  cm. §21)  $CD = AD - BC = 4$  cm,  $BC = CD$ . §22)  $EF = 2$  cm,  $BF = 4$  cm,  $AC = 3$  cm,  $AB = 6$  cm,  $BE = 6$  cm. §23) a)  $AD = 5$  cm,  $DC = 5$  cm,  $AC = 10$  cm; b) D este mijloc; c)  $BM = 1$  cm,  $AM = 4$  cm,  $CN = 2,5$  cm,  $BN = 4,5$  cm,  $MN = 3,5$  cm,  $AN = 7,5$  cm. §24) a)  $AB = 4$  cm,  $MC = 6$  cm,  $MD = 10$  cm,  $AD = 12$  cm; b) 5 cm. §25) b) 8 cm. §26)  $AD = 18$  cm. §27) a)  $MC = 9$  cm,  $AC = 12$  cm; b) 4,5 cm.

## Capitolul IX : Unghiuri

\*\* §1) a) Da; b) Da; c) Nu; d) Da; e) Nu; f) Da; g) Da; h) Da; i) Da; j) Da; k) Da; l) Nu. §2)  $\angle EAC = \angle BAC = \angle BAF = \angle EAF$ ;  $\angle CAG = \angle FAG = \angle CAD = \angle FAD$  a)  $\text{int}(\angle BAC)$ ; b)  $\text{int}(\angle EAC) \cup (AF)$ ; c)  $\text{int}(\angle FAD)$ ; d) o. §3)  $m(\angle CAD) = 7^\circ 45'$ ;  $m(\angle BAD) = 26^\circ 15'$ ;  $m(\angle BAE) = 54^\circ$ . §4)  $m(\angle COD) = 55^\circ$ ;  $m(\angle AOD) = 145^\circ$ . §5) a)  $15^\circ 30'$ ; b)  $48^\circ 15'$ ; c)  $3^\circ 17'$ ; d)  $8^\circ 0'$ ; e)  $65^\circ 32'$ ; f)  $44^\circ 50'$ ; g)  $48^\circ 16' 22''$ ; h)  $63^\circ 35' 17''$ ; i)  $31^\circ 21' 51''$ ; j)  $4^\circ 18' 58''$ . §6) a)  $3639'$ ; b)  $61^\circ 54'$ ; c)  $50^\circ 25' 26''$ ; d)  $4^\circ 40'$ ; e)  $48^\circ 15' 28''$ ; f)  $62^\circ 30'$ ; g)  $4^\circ 38' 15''$ ; h)  $7^\circ 54' 39''$ ; i)  $4^\circ 55' 38''$ ; j)  $26^\circ 18'$ . §7) a)  $4^\circ 20' 24''$ ; b)  $28^\circ 58' 48''$ ; c)  $1^\circ 44' 5''$ ; d)  $22^\circ 5'$ ; e)  $32^\circ 49' 20''$ ; f)  $145^\circ 30' 43''$ . §8) ii)  $\angle POR = \angle KOP$ ;  $\angle LOM = \angle DOE$ ;  $\angle SOP = \angle TOS$ . §9)  $\angle BAC = \angle MON = \angle GEF$ ;  $\angle CAD = \angle KEG = \angle NOP$ ;  $\angle BAD = \angle MOP = \angle FEK$ ;  $m(\angle BAD) = 75^\circ$ . §10)  $m(\angle COD) = 40^\circ$ ,  $m(\angle BOD) = 100^\circ$ .

**Unghiuri adiacente, complementare, suplementare :** \* §1)  $m(\angle BAD) = 72^\circ$ . §2)  $m(\angle CAD) = 32^\circ$ . §3)  $m(\angle ABD) = 111^\circ$ . \*\* §5)  $m(\angle DBC) = 15^\circ$  sau  $m(\angle DBC) = 75^\circ$ . §6) a)  $58^\circ$  și  $148^\circ$ ; b)  $39^\circ$  și  $129^\circ$ ; c)  $3^\circ$  și  $93^\circ$ ; d)  $74^\circ 15'$ ; e)  $164^\circ 15'$ ; f)  $72^\circ 22'$  și  $162^\circ 22'$ ; g)  $6^\circ 1'$  și  $96^\circ 1'$ ; h)  $41^\circ 44' 45''$  și  $131^\circ 44' 45''$ ; i)  $16^\circ 10' 58''$  și  $106^\circ 10' 58''$ ; j)  $82^\circ 51' 47''$  și  $172^\circ 51' 47''$ ; k)  $55^\circ 59' 35''$  și  $145^\circ 59' 45''$ ; l)  $89^\circ 59' 2''$  și  $179^\circ 59' 2''$ ; m)  $89^\circ 37' 4''$  și  $179^\circ 37' 4''$ . §7) a) Da; b) Da; c) Nu; d) Nu. §8) a) Nu; b) Da; c) Nu; d) Da. §9) a) suplementare; b) suplementare; c) Nu; d) complementare. §10) a) Da; b) Nu; c) Nu; d) Da. §13)  $36^\circ$ . §14)  $m(\angle ABD) = 134^\circ$ .

**Bisectoarea unui unghi. Unghi drept, ascuțit, obtuz. Unghiuri opuse la vârf :** \*\* §2)  $m(\angle ABD) = 65^\circ$ . §3)  $m(\angle ABD) = 140^\circ$ ,  $m(\angle EBD) = 95^\circ$ . §4)  $m(\angle DBC) = 22^\circ$ ,  $m(\angle DBE) = 11^\circ$ ,  $m(\angle ABE) = 105^\circ$ . §5)  $m(\angle DBC) = 24^\circ$ ,  $m(\angle ABD) = 78^\circ$ . §6)  $m(\angle AOE) = 120^\circ$ ,  $m(\angle EOD) = 60^\circ$ ;  $150^\circ$ . §7)  $65^\circ$ . §8)  $77^\circ$ . §9)  $m(\angle COD) = 27^\circ$ ,  $m(\angle AOD) = 153^\circ$ ,  $m(\angle BOC) = 153^\circ$ . §10) a)  $[180^\circ - (45^\circ + 37^\circ)] : 2 = 49^\circ$ ; b)  $41^\circ$ ; c)  $m(\angle DOC) = 35^\circ$ ,  $m(\angle COE) = 55^\circ$ ;  $m(\angle EOB) = 55^\circ$ ;  $m(\angle COD) = 30^\circ$ ;  $m(\angle EOF) = 15^\circ 30'$ ;  $m(\angle FOB) = 15^\circ 30'$ ; c)  $m(\angle COD) = 23^\circ$ ;  $m(\angle EOF) = 42^\circ$ ;  $m(\angle DOE) = 50^\circ$ ; f)  $m(\angle COD) = 19^\circ$ ;  $m(\angle DOE) = 31^\circ$ ;  $m(\angle FOG) = 40^\circ$ ;  $m(\angle GOB) = 40^\circ$ ; g)  $m(\angle COD) = 43^\circ$ ;  $m(\angle DOE) = 47^\circ$ ;  $m(\angle EOB) = 47^\circ$ ; h)  $m(\angle COA) = 36^\circ$ ;  $m(\angle DOE) = 36^\circ$ ;  $m(\angle EOF) = 36^\circ$ ;  $m(\angle FOB) = 36^\circ$ . §11) a)  $m(\angle COB) = 90^\circ : 3 = 30^\circ$ ;  $m(\angle AOC) = 60^\circ$ ; b)  $m(\angle DOB) = 15^\circ$ ;  $m(\angle COD) = 30^\circ$ ;  $m(\angle COA) = 45^\circ$ ; c)  $m(\angle COD) = 8^\circ$ ;  $m(\angle EOB) = 23^\circ$ ;  $m(\angle COE) = 51^\circ$ ; d)  $m(\angle DOB) = 19^\circ$ ;  $m(\angle COD) = 29^\circ$ ;  $m(\angle COA) = 42^\circ$ ; e)  $m(\angle DOA) = 35^\circ$ ;  $m(\angle DOC) = 35^\circ$ ; f)  $m(\angle EOD) = 34^\circ$ ,  $m(\angle DOC) = 12^\circ$ ;  $m(\angle DOE) = 39^\circ$ ;  $m(\angle DOC) = 6^\circ$ ;  $m(\angle COA) = 6^\circ$ ; h)  $m(\angle DOC) = 22^\circ$ ;  $m(\angle EOF) = 15^\circ$ ;  $m(\angle FOG) = 8^\circ$ ;  $m(\angle GOB) = 8^\circ$ . §12) a)  $m(\angle COB) = 180^\circ : 4 = 45^\circ$ ;  $m(\angle COA) = 135^\circ$ ; b)  $m(\angle COA) = (180^\circ - 100^\circ) : 2 = 40^\circ$ ;  $m(\angle COB) = 140^\circ$ ; c)  $m(\angle DOB) = 26^\circ$ ;  $m(\angle DOC) = 52^\circ$ ; d)  $m(\angle COA) = 40^\circ$ ;  $m(\angle COB) = 140^\circ$ ; e)  $m(\angle EOB) = 18^\circ$ ;  $m(\angle COA) = 36^\circ$ ;  $m(\angle COD) = 54^\circ$ ; f)  $m(\angle COB) = 16^\circ$ ;  $m(\angle COD) = 32^\circ$ ;  $m(\angle EOD) = 72^\circ$ . §13) a)  $35^\circ + 90^\circ + 55^\circ = 180^\circ \Rightarrow$  Da; b) Nu; c) Da; d) Da. §14) a)  $m(\angle COB) = 120^\circ$ ; b)  $m(\angle COD) = (180^\circ - 80^\circ) : 2 = 50^\circ$ ;  $m(\angle COB) = 130^\circ$ ; c)  $m(\angle COD) = 36^\circ$ ;  $m(\angle BOC) = 144^\circ$ ; d)  $m(\angle COD) = 40^\circ$ ;  $m(\angle BOC) = 140^\circ$ ; e)  $m(\angle EOD) = 23^\circ$ ;  $m(\angle BOA) = m(\angle COD)$ ;  $m(\angle BOA) = 46^\circ$ ;  $m(\angle BOC) = 134^\circ$ ;  $m(\angle AOD) = 134^\circ$ ; f)  $m(\angle AOB) = 60^\circ$ ;  $m(\angle BOC) = 120^\circ$ ; g)  $m(\angle BOC) = 125^\circ$ ;  $m(\angle COD) = 55^\circ$ ;  $m(\angle BOA) = 55^\circ$ ;  $m(\angle AOD) = 125^\circ$ ; h)  $m(\angle AOF) = 28^\circ$ ;  $m(\angle AOE) = 34^\circ$ ;  $m(\angle AOD) = 124^\circ$ ;  $m(\angle DOC) = 56^\circ$ ;  $m(\angle BOC) = 124^\circ$ . \*\*\* §16) a) Da; b) Da.

**Unghiuri formate în jurul unui punct :** \* §1)  $72^\circ$ . \*\* §4) a)  $m(\angle AOD) = 360^\circ - (56^\circ + 37^\circ + 127^\circ) = 150^\circ$ ; b)  $m(\angle BOC) = 55^\circ$ ;  $m(\angle AOD) = 110^\circ$ ;  $m(\angle COD) = 175^\circ$ ; c)  $m(\angle AOB) = 40^\circ$ ;  $m(\angle BOC) = 70^\circ$ ;  $m(\angle COD) = 80^\circ$ ;  $m(\angle DOE) = 25^\circ$ . §5) a)  $m(\angle COB) = (180^\circ - 90^\circ) : 3 = 30^\circ$ ;  $m(\angle DOA) = 60^\circ$ ;  $m(\angle DOE) = 45^\circ$ ;  $m(\angle EOC) = 45^\circ$ ;  $m(\angle AOF) = 75^\circ$ ;  $m(\angle FOB) = 105^\circ$ ; b)  $m(\angle DOH) = 15^\circ$ ;  $m(\angle HOB) = 15^\circ$ ;  $m(\angle BOF) = 30^\circ$ ;  $m(\angle AOE) = 30^\circ$ ;  $m(\angle EOC) = 30^\circ$ ;

$m(\angle COD) = 90^\circ$ ;  $m(\angle AOF) = 150^\circ$ ; c)  $m(\angle COE) = 18^\circ$ ;  $m(\angle AOE) = 18^\circ$ ;  $m(\angle DOB) = 54^\circ$ ;  $m(\angle BOF) = 18^\circ$ ;  $m(\angle AOF) = 162^\circ$ ; d)  $m(\angle BOD) = 180^\circ - 65^\circ \cdot 2 = 50^\circ$ ;  $m(\angle DOG) = 45^\circ$ ;  $m(\angle GOC) = 45^\circ$ ;  $m(\angle COE) = 20^\circ$ ;  $m(\angle EOA) = 20^\circ$ ;  $m(\angle BOF) = m(\angle EOA)$ ;  $m(\angle FOA) = 160^\circ$ ; e)  $m(\angle EOA) = 45^\circ$ ;  $m(\angle COE) = 45^\circ$ ;  $m(\angle GOC) = 30^\circ$ ;  $m(\angle DOG) = 30^\circ$ ;  $m(\angle BOD) = 30^\circ$ ;  $m(\angle BOF) = m(\angle EOA)$ ;  $m(\angle FOA) = 135^\circ$ . §6)  $m(\angle EOC) = 25^\circ$ ;  $m(\angle AOB) = 130^\circ$ ; cum  $m(\angle AOD) = m(\angle BOC) \Rightarrow D, O, B$  coliniare;  $m(\angle DOC) = 130^\circ$ . §7) a)  $m(\angle HOF) = 45^\circ$ ;  $m(\angle FOB) = 45^\circ$ ;  $m(\angle BOD) = 180^\circ - (28^\circ + 90^\circ) = 62^\circ$ ;  $\angle COA \equiv \angle BOD$ ;  $\angle AOE \equiv \angle FOB$ ;  $m(\angle EOD) = 73^\circ$ ; b)  $m(\angle MOB) = 22^\circ$ ;  $m(\angle DOB) = 44^\circ$ ;  $\angle AOC \equiv \angle DOB \Rightarrow m(\angle AOG) = 19^\circ$ ;  $m(\angle COL) = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$ ;  $m(\angle BOL) = 71^\circ$ ;  $m(\angle AOD) = 136^\circ$ ; c)  $x = 90^\circ : 3 = 30^\circ \Rightarrow m(\angle BOF) = 30^\circ$ ;  $(\angle COA) = 60^\circ$ ;  $m(\angle AOD) = 120^\circ$ ; d)  $x = 180^\circ : 4 = 45^\circ \Rightarrow m(\angle DOF) = 22^\circ 30'$ ;  $m(\angle FOA) = m(\angle DOF)$ ;  $m(\angle AOM) = 67^\circ 30'$ ;  $m(\angle MOC) = m(\angle AOM)$ ; e)  $m(\angle GOF) = 18^\circ$ ;  $m(\angle BOF) = m(\angle EOA)$ ;  $m(\angle AOD) = 54^\circ$ ;  $\angle BOC \equiv \angle AOD$ ;  $m(\angle EOC) = 108^\circ$ ; g)  $\angle COE \equiv \angle FOD$ ;  $m(\angle COA) = 180^\circ - (90^\circ + 18^\circ + 15^\circ) = 58^\circ$ ;  $\angle DOB \equiv \angle AOC$ ;  $m(\angle EOB) = 107^\circ$ ; h)  $\angle FOA \equiv \angle DOF \equiv \angle COE \equiv \angle BOE$ ;  $\angle DOB \equiv \angle AOC$ ;  $m(\angle FOA) = (180^\circ - 40^\circ) : 2 = 70^\circ$ . §8)  $x = (360^\circ - 35^\circ \cdot 2 - 85^\circ \cdot 2) : 4 = 30^\circ$ ;  $m(\angle DOC) = 90^\circ$ . §9) a)  $m(\angle BAE) = 150^\circ$ ; b)  $m(\angle BAD) = 80^\circ$ ; c)  $115^\circ$ ; d)  $m(\angle FAC) + m(\angle CAD) + m(\angle DAE) = 30^\circ + 20^\circ + 130^\circ = 180^\circ \Rightarrow F, A, E$  coliniare. \*\*\* §10)  $m(\angle GOM) = 112^\circ$ ;  $m(\angle MOS) = 96^\circ$ ;  $m(\angle GOS) = 152^\circ$ . §11)  $m(\angle AOF) = 140^\circ$ ;  $m(\angle AOD) = 40^\circ$ ;  $m(\angle AOB) = 60^\circ$ ;  $m(\angle AOC) = 120^\circ \Rightarrow m(\angle BOC) = 60^\circ$ ;  $m(\angle EOC) = 180^\circ - (40^\circ + 20^\circ + 60^\circ) = 60^\circ \Rightarrow \angle EOC \equiv \angle BOC \Rightarrow (OC$  bisectoare.

## Capitolul X : Congruența triunghiurilor

**Construcția triunghiurilor :** \*\* §1) 13,5 și 13,5 sau 15 și 12. §2)  $BC = 15$  cm,  $AB = 30$  cm,  $AC = 19$  cm. §3) 16; 20 și 32. §4)  $AB = 13$  cm,  $AC = 10,4$  cm,  $BC = 15,6$  cm. §5) 30; 40 și 24. §6)  $AC = 45$  cm,  $AB = 72$  cm,  $BC = 30$  cm. §8) triunghi isoscel. §12) obtuzunghic. §13) dreptunghic. §14) obtuzunghic isoscel. §15) echilateral.

**Cazurile de congruență a triunghiurilor :** \* §1) a)  $\angle AOC \equiv \angle BOD$ , cazul U.L.U. pentru că :  $\angle A \equiv \angle B$  (au măsura de  $70^\circ$ ),  $(OB) \equiv (OA)$  (au fiecare 5 cm) și  $\angle AOC \equiv \angle BOD$  (sunt unghiuri opuse la vârf), b) și c) rezultă din  $\angle AOC \equiv \angle BOD$ ; d) L.U.L. §2)  $(AO) \equiv (OC)$  (au 6 cm),  $\angle A \equiv \angle C$  (au  $90^\circ$ ),  $\angle AOD \equiv \angle COB$  (unghiuri opuse la vârf)  $\Rightarrow$  U.L.U. §3) L.U.L.  $(CA) \equiv (CB)$  (din ipoteză),  $\angle ACO \equiv \angle BCO$  (CO bisectoare), CO latură comună  $\Rightarrow \angle COB \equiv \angle COA$  dar  $m(\angle COA) + m(\angle COB) = 180^\circ$ ,  $m(\angle COA) = 90^\circ$ . §4) L.L.L. \*\* §5) L.L.L. pentru că  $(AB) \equiv (AC) \equiv (AD) \equiv (BD) \equiv (AE) \equiv (CE)$ . §6)  $\triangle ACD \equiv \triangle BCD$  isoscele pentru că  $(AC) \equiv (AD) \equiv (AB) \equiv (BD) \equiv (BC)$  și congruente (L.L.L.) pentru că  $(AC) \equiv (BC)$ ,  $(AD) \equiv (BD)$ , CD latură comună. §7) L.L.L. :  $(OA) \equiv (OB)$  (raze), OM latură comună,  $(AM) \equiv (BM)$  (din ipoteză). §8) prima figură : a)  $\triangle OBC \equiv \triangle OAD$ , L.U.L. :  $(OC) \equiv (OA)$  (raze în cercul mic),  $\angle O$  unghi comun,  $(OB) \equiv (OD)$  (raze în cercul mare); d) tr. isoscele. §9) a) și b) L.U.L. §10) a)  $AM = AB - BM$ ;  $AN = AC - NC$  și cum  $(AB) \equiv (AC)$  ( $\triangle$  isoscel) și  $(MB) \equiv (NC)$  (din ipoteză)  $\Rightarrow (AM) \equiv (AN)$ ; b) L.U.L. §11) a)  $\angle DAB \equiv \angle DAM - \angle BAM$  și  $\angle EAC \equiv \angle EAM - \angle CAM$  și cum  $\angle DAM \equiv \angle EAM$  (din ipoteză),  $\angle BAM \equiv \angle CAM$  (AM bisectoare)  $\Rightarrow \angle DAB \equiv \angle EAC$ ; b) L.U.L. §12) a) L.U.L. §13) L.U.L. §14) L.U.L. §15) a)  $\triangle ABE \equiv \triangle ADC$  (L.U.L.)  $\Rightarrow [EB] \equiv [CD]$  și  $\angle AEB \equiv \angle ACD$ ,  $\angle ADC \equiv \angle ABE$ ,  $[BC] \equiv [ED]$  (diferențe de segmente congruente),  $\angle BED \equiv \angle DCB$  (suplemente de unghiuri congruente),  $\triangle BOC \equiv \triangle DOE$  (L.U.L.). §16) a)  $AM = AB/2$  și  $AN = AC/2$ , cum  $(AB) \equiv (AC) \Rightarrow (AM) \equiv (AN) \Rightarrow$  L.U.L.; c) din demonstrația de la a)  $\Rightarrow \angle AND \equiv \angle AME$  cum  $m(\angle DNC) + m(\angle AND) = 180^\circ$  și  $m(\angle BME) + m(\angle AME) = 180^\circ \Rightarrow \angle DNC \equiv \angle BME \Rightarrow \triangle DNC \equiv \triangle BME$ , L.U.L. §17) a) L.U.L.; b) de la a); c) isoscel. §18) a) L.U.L.; c) L.L.L. §19) a) L.U.L. :  $(AM) \equiv (AN)$ , AD latură comună și  $\angle MAD \equiv \angle NAD$ ; b) și c) rezultă din a); d)  $\angle BMD$  și  $\angle CND$  sunt suplementele  $\angle AMD$ ,  $\angle AND \Rightarrow \angle BMD \equiv \angle CND$ ; e) L.U.L. §20) a) L.U.L.; b) și c) din a); d)  $\triangle ACE \equiv \triangle ADE$ , L.U.L.; e) L.L.L.; f) din d)  $\Rightarrow \angle AEC \equiv \angle AED$  și cum  $m(\angle AEC) + m(\angle AED) = 180^\circ \Rightarrow m(\angle AEC) = 90^\circ$ . §21) a) L.U.L.; b) și c) din a); d)  $MB = AB - AM$ ,  $NC = AC - AN$  și cum  $(AM) \equiv (AN)$  și  $(AB) \equiv (AC) \Rightarrow (MB) \equiv (NC)$ ; e)  $\angle BMD$  și  $\angle CND$  sunt suplemente de unghiuri congruente; f) L.U.L. §22) a) L.U.L.; b) și c) din a); d)  $(MB) \equiv (NC)$  ca diferențe de segmente congruente; e) suplemente de unghiuri congruente; f) L.U.L. §23) a) L.U.L.; b) din a); c) din a)  $\Rightarrow \angle CAB \equiv \angle DAB \Rightarrow \triangle CAB \equiv \triangle DAB$ , L.U.L.; d) cum  $(AC) \equiv (AD) \Rightarrow \triangle ACD$  isoscel; e) din c)  $\Rightarrow (CB) \equiv (DB) \Rightarrow \triangle CBD$  isoscel. §24) a) L.U.L.; b) din a); c)  $P_{\triangle ABC} = 19$  cm; d)  $P_{\triangle BDC} = CE + ED + CD = CE + DB + CD = CE + CB = AC - AE + CB = AC - AB + CB = 7$  cm - 4 cm + 8 cm = 11 cm. §25)  $\triangle AMC \equiv \triangle ANB$ , L.U.L.  $\Rightarrow \angle ACM \equiv \angle ABN$  și  $\angle ANB \equiv \angle AMC \Rightarrow \angle BMC \equiv \angle CNB$  (suplemente de unghiuri congruente) și  $(MB) \equiv (NC)$  (diferențe de segmente congruente)  $\Rightarrow \triangle MBP \equiv \triangle NCP$ , U.L.U.  $\Rightarrow (BP) \equiv (PC)$ .

## Capitolul XI : Perpendicularitate în plan

**Drepte perpendiculare. Construcția triunghiurilor dreptunghice :** \* §1) a) Da; b) Nu; c) Da; d) Da; e) Da; f) Da; g) Da. \*\* §2) fie  $\angle AOB$  și  $\angle BOC$  unghiuri adiacente suplementare,  $(OE$  și  $(OF$  bisectoare,  $m(\angle EOF) = m(\angle AOB) : 2 + m(\angle BOC) : 2 = [m(\angle AOB) + m(\angle BOC)] : 2 = 180^\circ : 2 = 90^\circ$ . §3)  $m(\angle COB) = (180^\circ - 62^\circ - 6^\circ) : 4 = 28^\circ$ ,  $m(\angle COE) = 28^\circ + 62^\circ = 90^\circ \Rightarrow CO \perp OE$ . §5)  $m(\angle COE) = 110^\circ$ ;  $145^\circ$ . §6)  $m(\angle AOB) + m(\angle AOC) =$

$90^\circ \Rightarrow m(\angle AOC) = 60^\circ \Rightarrow m(\angle BOC) = 30^\circ$ ,  $m(\angle AOC) + m(\angle COD) = 180^\circ \Rightarrow m(\angle COD) = 120^\circ \Rightarrow m(\angle AOD) = 60^\circ$   
 $\Rightarrow m(\angle DOB) = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ \Rightarrow OD \perp OB$ . §7) (OC bisectoare  $\Rightarrow \angle COE \equiv \angle BOC \Rightarrow m(\angle COE) = 45^\circ$ ,  $m(\angle COB) = 45^\circ$ ,  $m(\angle DOE) = 90^\circ$ ,  $\angle DOA \equiv \angle BOC$ ,  $m(\angle BOA) = 135^\circ$ . §8)  $m(\angle AOB) = m(\angle BOC) = m(\angle COD) = m(\angle DOE) = m(\angle EOF) = m(\angle FOA)$  și suma lor este  $360^\circ \Rightarrow m(\angle AOB) = 69^\circ \Rightarrow m(\angle MON) = 30^\circ + 60^\circ + 60^\circ + 30^\circ = 180^\circ \Rightarrow M, O, N$  coliniare;  $m(\angle COF) = 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow C, O, F$  coliniare;  $m(\angle AOD) = 60^\circ + 60^\circ + 60^\circ = 180^\circ \Rightarrow A, O, D$  coliniare;  $m(\angle MOC) = 30^\circ + 60^\circ = 90^\circ \Rightarrow MO \perp OC$ , cum  $M, O, N$  coliniare și  $F, O, C$  coliniare  $\Rightarrow MN \perp FC$ . §9)  $m(\angle AOB) + m(\angle AOC) = 180^\circ \Rightarrow m(\angle AOC) = 126^\circ \Rightarrow m(\angle BOC) = 72^\circ \Rightarrow m(\angle EOB) = 36^\circ$ ;  $m(\angle EOA) = 36^\circ + 54^\circ = 90^\circ \Rightarrow EO \perp OA$ . §10)  $m(\angle AOC) = 70^\circ \Rightarrow m(\angle COB) = 50^\circ \Rightarrow m(\angle DOB) = 40^\circ + 50^\circ = 90^\circ \Rightarrow OD \perp OB$ ;  $m(\angle EOC) = 20^\circ \Rightarrow m(\angle EOA) = 20^\circ + 50^\circ + 20^\circ = 90^\circ \Rightarrow EO \perp OA$ . §11)  $m(\angle AOB) + m(\angle AOC) = 180^\circ \Rightarrow m(\angle AOC) = 135^\circ \Rightarrow m(\angle BOC) = 90^\circ \Rightarrow OC \perp OB$ ,  $m(\angle AOB) + m(\angle AOE) = 90^\circ \Rightarrow OB \perp OE \Rightarrow m(\angle COE) = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow C, O, E$  coliniare. §12)  $m(\angle EOA) = 180^\circ - 40^\circ - 90^\circ = 50^\circ \Rightarrow m(\angle EOF) = 25^\circ$ ;  $m(\angle EOD) = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$ ;  $m(\angle FOD) = 25^\circ + 65^\circ = 90^\circ \Rightarrow FO \perp OD$ . §13)  $m(\angle AOM) = m(\angle MOB) \Rightarrow m(\angle MOB) = 40^\circ \Rightarrow m(\angle MOC) = 40^\circ + 50^\circ = 90^\circ \Rightarrow MO \perp OC$ ;  $m(\angle DOC) = 360^\circ - (80^\circ + 50^\circ + 90^\circ + 30^\circ + 40^\circ) = 70^\circ \Rightarrow \angle EON \equiv \angle NOD$ ;  $m(\angle NOD) = 20^\circ \Rightarrow m(\angle NOC) = 20^\circ + 70^\circ = 90^\circ \Rightarrow NO \perp OC$ ;  $m(\angle MON) = m(\angle MOC) + m(\angle CON) = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ \Rightarrow M, O, N$  coliniare.

**Cazurile de congruență a triunghiurilor dreptunghice :** \*\* §4) a)  $m(\angle DAB) = 90^\circ - m(\angle BAC)$ ,  $m(\angle EAC) = 90^\circ - m(\angle BAC) \Rightarrow \angle DAB \equiv \angle EAC$   $\Delta DAB \equiv \Delta EAC$ , L.U.L.,  $(AD) \equiv (AE)$ ,  $(AB) \equiv (AC)$ . §9) a) ipotenuză - unghi ascuțit; b) se arată că  $(DC) \equiv (AB) \Rightarrow \Delta DMC \equiv \Delta BMA$ , catetă - unghi ascuțit.

**Bisectoarea și mediatoarea :** \* §3) fie OC mediatoare,  $O \in (AB) \Rightarrow \Delta OCA \equiv \Delta OCB$ , L.U.L. \*\* §5) a) L.U.L.; b) din a); c)  $AD + DC = AD + DB = AB = 8$  cm și  $P = 14$  cm. §8) ipotenuză - unghi ascuțit.

**Înălțimea unui triunghi. Aria triunghiului :** \* §1) L.U.L.:  $(AD) \equiv (DE)$  (din ipoteză),  $\angle ADC \equiv \angle EDC$  (au  $90^\circ$ ),  $DC$  latura comună. §2)  $32$  cm<sup>2</sup>. §3)  $8$  cm. §4)  $6$  cm<sup>2</sup>. \*\* §5) a)  $48$  cm<sup>2</sup>; b)  $50$  cm<sup>2</sup>. §6)  $20$  cm.

## Capitolul XII : Paralelism.

**Drepte paralele :** \* §1) a)  $70^\circ$  și  $110^\circ$ ; b)  $36^\circ$  și  $144^\circ$ ; c)  $108^\circ$  și  $72^\circ$ ; d)  $51^\circ$  și  $129^\circ$ . \*\* §2) a)  $a \parallel b$ ; b)  $a \parallel b$ ; c) Nu; d)  $a \parallel b$ ; e) Nu; f)  $a \parallel b$ . §3)  $\angle 1 = 30^\circ$ ;  $\angle 4 = 150^\circ$ ;  $\angle 1 \equiv \angle 7 \equiv \angle 2 \equiv \angle 5$  și  $\angle 4 \equiv \angle 6 \equiv \angle 8 \equiv \angle 3$ . §4)  $\angle 5 = 72^\circ$ ;  $\angle 8 = 102^\circ$ . §5) a) cum  $132^\circ + 48^\circ = 180^\circ \Rightarrow a \parallel b \Rightarrow$  unghiurile căutate au  $70^\circ$ ; b)  $89^\circ 30' + 90^\circ 30' = 180^\circ \Rightarrow a \parallel b \Rightarrow 27^\circ 45'$ . §6)  $(\angle EAB) = 50^\circ$ ,  $m(\angle ABF) = 50^\circ$ ,  $m(\angle ABC) = 25^\circ$ . §7)  $(\angle CAB) = 38^\circ \Rightarrow m(\angle CAD) = 76^\circ \Rightarrow \angle CAD \equiv \angle ADF \Rightarrow a \parallel b$ . §16)  $m(\angle EAB) = 103^\circ \Rightarrow m(\angle DAB) = 21^\circ$ ;  $m(\angle CBF) = 159^\circ \Rightarrow m(\angle CBA) = 21^\circ \Rightarrow \angle DAB \equiv \angle CBA \Rightarrow a \parallel b$ . §17) dacă bisectoarele sunt paralele  $\Rightarrow$  jumătățile de unghiuri sunt congruente, ca unghiuri alterne interne formate de drepte paralele cu o secantă  $\Rightarrow$  unghiurile sunt congruente  $\Rightarrow$  dreptele sunt paralele. §18) U.L.U.. §19) U.L.U.

## Capitolul XIII : Proprietățile triunghiului

**Suma măsurilor unghiurilor unui triunghi :** \* §1) a)  $m(\angle C) = 55^\circ$ ; b)  $m(\angle A) = 44^\circ 17'$ ; c)  $m(\angle L) = 120^\circ$ ,  $\Delta$  isoscel; d)  $m(\angle P) = 74^\circ 25'$ ; e)  $m(\angle S) = 69^\circ 10' 39''$ ; f)  $57^\circ$ ,  $\Delta$  isoscel; g)  $60^\circ$ ,  $\Delta$  echilateral; h)  $m(\angle G) = 90^\circ$ , triunghi dreptunghic. §2) a)  $90^\circ$  și  $60^\circ$ ; b)  $90^\circ$  și  $54^\circ 31'$ ; c)  $90^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $45^\circ$ . §3)  $m(\angle C) = 25^\circ$ . \*\* §4)  $m(\angle C) = 32^\circ$ ,  $m(\angle B) = 64^\circ$ . §5)  $m(\angle A) = 40^\circ$ . §6) a)  $45^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $90^\circ$ ; b)  $28^\circ$ ,  $56^\circ$ ,  $96^\circ$ ; c)  $24^\circ$ ;  $72^\circ$ ;  $84^\circ$ . §7) echilaterale. §8)  $30^\circ$  și  $60^\circ$ . §9)  $15^\circ$  și  $45^\circ$ . §10)  $56^\circ$  și  $84^\circ$ . §11)  $50^\circ$ ;  $60^\circ$ ;  $70^\circ$ . §12)  $40^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $80^\circ$ . §13)  $75^\circ$ ;  $45^\circ$ ;  $60^\circ$ . §14)  $m(\angle C) = 82^\circ$ ,  $m(\angle ACD) = 41^\circ$ ,  $m(\angle ADC) = 109^\circ$ ,  $m(\angle DBC) = 71^\circ$ . §15)  $m(\angle B) = 50^\circ$ ,  $m(\angle C) = 90^\circ$ ,  $m(\angle ADB) = 115^\circ$ . §16)  $m(\angle A) = 40^\circ$ ,  $m(\angle C) = 90^\circ$ ,  $m(\angle ABC) = 70^\circ$ . §17)  $m(\angle A) = 68^\circ$ ,  $m(\angle BAD) = 34^\circ$ ,  $m(\angle BDA) = 118^\circ$ . §18)  $m(\angle A) = 50^\circ$ ,  $m(\angle BAD) = 30^\circ$ ,  $m(\angle CAD) = 20^\circ$ ,  $m(\angle BDA) = 90^\circ$ . §19)  $m(\angle ABD) = 37^\circ$ ,  $m(\angle C) = 67^\circ$ ,  $m(\angle ADB) = 90^\circ$ . §23)  $m(\angle AOB) = 105^\circ$ ,  $m(\angle AOD) = 75^\circ$ ,  $m(\angle BAC) = 30^\circ$ ,  $m(\angle CBD) = 27^\circ$ ,  $m(\angle AEB) = 78^\circ$ . §24)  $m(\angle C) = 62^\circ$ ,  $m(\angle CAD) = 28^\circ$ ,  $m(\angle BAD) = 62^\circ$ ,  $m(\angle AED) = 90^\circ$ ,  $m(\angle ADE) = 28^\circ$ ,  $m(\angle BED) = 90^\circ$ ,  $m(\angle BDE) = 62^\circ$ . §25)  $m(\angle ANB) = 10^\circ$ ,  $m(\angle NBA) = 180^\circ - (40^\circ + 20^\circ) = 120^\circ$ ,  $m(\angle NAB) = 50^\circ$ . §26) DE bisectoarea unghiului  $\angle ADC$ ,  $E \in AC$  în  $\Delta ADC \Rightarrow m(\angle DAC) = 20^\circ \Rightarrow m(\angle BAD) = 45^\circ$  și  $m(\angle ADE) = 45^\circ \Rightarrow \angle BAD \equiv \angle ADE$  (unghiuri alterne interne)  $\Rightarrow AB \parallel DE$ . §27)  $m(\angle C) = 180^\circ - (20^\circ + 35^\circ + 90^\circ) = 35^\circ \Rightarrow \Delta CAD$  isoscel. §28) în  $\Delta CDA \Rightarrow m(\angle CDA) = 90^\circ \Rightarrow CD \perp AB$ , în  $\Delta ABC$ ,  $m(\angle BCA) = 80^\circ = m(\angle BED) \Rightarrow DE \parallel AC$ . §29)  $m(\angle ABC) = 60^\circ \Rightarrow m(\angle ABE) = m(\angle CBE) = 30^\circ$ ,  $m(\angle ABE) = m(\angle DEB) = 30^\circ \Rightarrow DE \parallel AB$ . §30) a) U.L.U.; b), c) două drepte perpendiculare pe a treia dreaptă sunt paralele între ele.

**Mediana unui triunghi. Simetria față de o axă :** \*\* §1)  $KL = 20$ ,  $ML = 22$  și  $MK = 22$ . §2) perimetrul  $\Delta DEF = 34$  cm sau  $P = 32$  cm. §3)  $P = 48$  cm. §7) a) L.U.L.; b) de la punctul a)  $\Rightarrow (AB) \equiv (EC)$  și cum  $(AB) \equiv (AC) \Rightarrow (AC) \equiv (EC) \Rightarrow \Delta ECA$  isoscel. §8) a)  $\angle ABM \equiv \angle DCM$ , L.U.L.  $\Rightarrow \angle ABM \equiv \angle DCM$  (alterne interne)  $\Rightarrow AB \parallel CD$ ; b) la fel pentru  $\Delta AMC \equiv \Delta DMB$ . §9) a) U.L.U.; b) L.U.L.; c) din b)  $\Rightarrow \angle MCD \equiv \angle MAB \Rightarrow DC \perp AB$ . §10)  $AD \cap BC = \{M\}$  și  $\Delta AMC \equiv \Delta DMB$  și  $\Delta ABM \equiv$



$\triangle DCM$ . §11)  $m(\angle A) = 60^\circ \Rightarrow m(\angle CAE) = 30^\circ$ ,  $ED \cap AC = \{P\}$ , cum  $\triangle APE = \triangle APD \Rightarrow \triangle AED$  isoscel cu  $m(\angle EAD) = 60^\circ \Rightarrow \triangle AED \Rightarrow$  echilateral. §12) echilateral. §13) a) L.U.L.: (AM) (din ipoteză), (BM) = (MC) (pentru că AM mediană),  $\angle AMC = \angle BMC$  (unghiuri opuse la vârf); b) L.U.L.; c) L.L.L.: (AC) = (DB) (din demonstrație), (AB) = (DC) (din demonstrație) și BC latura comună.

**Triunghiul isoscel:** \* §1)  $AC = 7 \text{ cm} \Rightarrow \triangle$  isoscel, cum  $(AC) = (BC) \Rightarrow \angle A = \angle B$ . §2)  $AC = 5,5 \text{ cm} \Rightarrow (AC) = (AB) \Rightarrow \angle B = \angle C$ . \*\* §3) a)  $6 \text{ cm} + 8 \text{ cm} + 8 \text{ cm} = 22 \text{ cm}$ ; b)  $20 \text{ cm}$ ; c)  $38 \text{ cm}$ . §4) a)  $\triangle ABC$  isoscel  $(AB) = (AC)$ ; b) nu e isoscel; c) nu e isoscel; d)  $\triangle ABC$  isoscel  $(AC) = (BC)$ ; e)  $\triangle ABC$  isoscel,  $(AB) = (AC)$ ; f)  $\triangle ABC$  isoscel  $(BC) = (BA)$ . §5) a)  $AB = 22 \text{ cm} - (7 \text{ cm} + 8 \text{ cm}) = 7 \text{ cm} \Rightarrow (AB) = (AC) \Rightarrow m(\angle B) = 45^\circ$ ; b)  $AC = 9 \text{ cm} \Rightarrow (AC) = (BC) \Rightarrow m(\angle B) = 28^\circ$ . §6) a)  $\angle BAD = \angle CAD \Rightarrow AD$  bisectoare din vârf  $\Rightarrow$  mediana și înălțime  $CD = 4 \text{ cm}$ ,  $m(\angle BDA) = 90^\circ$ ; b)  $(BD) = (DC) \Rightarrow AD$  mediana din vârf  $\Rightarrow$  bisectoare și înălțime  $\Rightarrow m(\angle BAD) = 25^\circ$ ,  $m(\angle BDA) = 90^\circ$ ; c)  $AD \perp BC \Rightarrow AD$  înălțime din vârf  $\Rightarrow$  bisectoare și mediană  $\Rightarrow BD = 4 \text{ cm}$ ,  $m(\angle BAD) = 25^\circ$ ,  $AC = 10 \text{ cm}$ ,  $P_{\triangle ABC} = 28 \text{ cm}$ . §7) a)  $\triangle ABC$  isoscel  $\Rightarrow \angle ABC = \angle ACB$  (unghiuri de la bază)  $\Rightarrow \angle EBA = \angle FCA$  (diferențe de unghiuri congruente)  $\Rightarrow \triangle EBA = \triangle FCA$ , L.U.L.; b) cum  $(AE) = (AF)$  (din a)  $\Rightarrow \triangle AEF$  isoscel. §9) a)  $\angle EBA = \angle FCA$  (diferențe de unghiuri congruente)  $\Rightarrow \triangle EBA = \triangle FCA$ , L.U.L.  $\Rightarrow (AE) = (AF) \Rightarrow \triangle AEF$  isoscel. §10) a)  $\angle DBC = \angle DCB$  (jumătăți de unghiuri congruente)  $\Rightarrow \triangle DBC$  isoscel  $\Rightarrow (BD) = (DC)$  c) L.U.L.  $\Rightarrow \angle BAD = \angle CAD \Rightarrow AD$  bisectoare. §11) a) L.U.L.; b) rezultă din a); c) din a) rezultă  $(AD) = (AE) \Rightarrow \triangle ADE$  isoscel. §12)  $\triangle ABD = \triangle ACE$ , L.U.L.  $\Rightarrow (AD) = (AE) \Rightarrow \triangle ADE$  isoscel. §13) cum  $\angle EBA = \angle FCA$  (suplemente de unghiuri congruente)  $\Rightarrow \triangle ABE = \triangle ACF$ , U.L.U.  $\Rightarrow (AE) = (AF) \Rightarrow \triangle AEF$  isoscel. §14) DA mediană din vârf  $\Rightarrow$  bisectoare și înălțime  $\Rightarrow m(\angle BDE) = 90^\circ \Rightarrow \angle BDE = \angle CDE$ , L.U.L.  $\Rightarrow \angle EBD = \angle ECD$ ; b)  $\angle ABE = \angle ACE$  (diferențe de unghiuri congruente). §15)  $(AC) = (CM)$ . §16)  $\triangle ENP = \triangle EPN$ , L.U.L. §17)  $\triangle MCB = \triangle MBC$ , L.U.L. §18) fie DC și BE bisectoarele  $\Rightarrow \triangle DCB = \triangle ECB$ , L.U.L. §19)  $\triangle ABM = \triangle ACM$ , L.U.L.,  $\triangle BME = \triangle CME$ , L.U.L. §20) a)  $10 \text{ cm}^2$ ; b)  $8 \text{ cm}$ . §21)  $20 \text{ cm}$ . §22)  $\angle CBF = \angle AFB \Rightarrow a \parallel b$  și  $\angle CBF = \angle ABF \Rightarrow$  bisectoare  $\Rightarrow \angle ABF = \angle AFB \Rightarrow \triangle ABF$  isoscel. §23) de la problema anterioară  $\Rightarrow \triangle ABC$  isoscel, AD bisectoare din vârf  $\Rightarrow AD$  înălțime și mediană  $\Rightarrow AD \perp BC$  și  $(BD) = (DC)$ . §24) a) și b) ca la 21); c)  $m(\angle CAD) + m(\angle BAD) = m(\angle EAD)/2$ ;  $m(\angle FAD)/2 = [m(\angle EAD) + m(\angle FAD)]/2 = 180^\circ/2 = 90^\circ$ ; d)  $(CD) = (DA)$  ( $\triangle ADC$  isoscel),  $(AD) = (DB)$  ( $\triangle DAB$  isoscel),  $(CD) = (DB) \Rightarrow AD$  mediană. §25)  $EF \parallel NP \Rightarrow \angle MEF = \angle NMP$  și  $\angle MEF = \angle MPN$  (unghiuri corespondente) și cum  $\angle MNP = \angle MPN \Rightarrow \angle MEF = \angle MFE$ . §26) se arată că  $\triangle DAE = \triangle DEA \Rightarrow \triangle DAE$  isoscel  $\Rightarrow BD$  înălțime  $\Rightarrow BD \perp AE$  dar  $AE \parallel DC \Rightarrow BD \perp DC$ ,  $DC \perp EF \Rightarrow BD \perp EF$ . §27)  $\angle GCD = \angle BCD$  (CD bisectoare),  $\angle GCD = \angle CGE$  (alterne interne),  $CD \parallel GE$ ,  $\angle BCD = \angle GEC$  (corespondente),  $CD \parallel GE \Rightarrow \angle GEC = \angle CGE$ . §28)  $\angle ABC = \angle ACB$  și  $\angle ABC = \angle OAC \Rightarrow \angle OBC = \angle ACB \Rightarrow AC \parallel BO$ . §29) a)  $MC = BC/2$  și  $NC = CE/2 \Rightarrow MN = BE/2$ ,  $AM \perp BE$ ,  $DN \perp BE \Rightarrow AM \parallel DN$  și cum  $\angle ABC = \angle ACB = \angle DCE = \angle DEC \Rightarrow AB \parallel DE \Rightarrow m(\angle NDE) = 20^\circ$ . §30) a)  $51^\circ$  și  $51^\circ$ ; b)  $35^\circ$  și  $110^\circ$ ; c)  $50^\circ 30'$  și  $79^\circ$ . §31) dacă unghiul  $\angle D$  este unghiul de vârf al triunghiului isoscel  $\Rightarrow m(\angle B) = 66^\circ$  dacă  $\angle D$  este unul din unghiurile de la baza triunghiului  $\Rightarrow m(\angle B) = 48^\circ$ . §32)  $70^\circ$ ,  $50^\circ$ ,  $55^\circ$ . §33) a)  $68^\circ$ ; b)  $130^\circ$ . §34) a)  $\triangle BEC$  este isoscel pentru că  $\angle C = \angle BEC$ ,  $m(\angle C) = 72^\circ$ ; b)  $\triangle BEA$  este isoscel,  $\angle A = \angle EBA$ ,  $m(\angle A) = 36^\circ$ ; c)  $\triangle AEF$  este isoscel,  $\angle EAF = \angle EFA$ ,  $m(\angle EAF) = 54^\circ$ . §35)  $50^\circ$ . §36)  $(AB) = (AD) \Rightarrow \triangle ABD$  isoscel cu  $m(\angle B) = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABD$  echilateral  $\Rightarrow (AD) = (BD)$  și  $m(\angle ADB) = 60^\circ \Rightarrow m(\angle ADC) = 120^\circ$  și  $m(\angle DAC) = 60^\circ$ ,  $m(\angle ACD) = 30^\circ$ . §37)  $\angle B = \angle C$ ,  $m(\angle B) = 80^\circ$ ,  $m(\angle MNB) = 80^\circ \Rightarrow m(\angle BNP) = 40^\circ \Rightarrow m(\angle CNO) = 40^\circ$ ,  $m(\angle NCO) = 100^\circ \Rightarrow m(\angle O) = 40^\circ$ . §38) în  $\triangle APE \Rightarrow m(\angle E) = 70^\circ$ ; în  $\triangle ABC \Rightarrow \angle C = \angle ABC$ ,  $m(\angle C) = 80^\circ \Rightarrow m(\angle EBD) = 100^\circ \Rightarrow$  în  $\triangle BED$ ,  $m(\angle BDE) = 10^\circ$ . §39) în  $\triangle ABC \Rightarrow \angle B = \angle C$ ,  $m(\angle B) = 70^\circ \Rightarrow m(\angle ACE) = m(\angle BCE) = 35^\circ$ , în  $\triangle BDC \Rightarrow m(\angle BDC) = 20^\circ$  în  $\triangle BFC = 125^\circ$ . §40) M mijlocul lui AB, bisectoarea unghiului  $\angle A$  intersectează mediatoarea lui AB în O  $\Rightarrow$  în  $\triangle AMO$  dreptunghic  $\Rightarrow m(\angle MAO) = 40^\circ$ ,  $m(\angle BAC) = 80^\circ \Rightarrow \angle B = \angle C$ ,  $m(\angle B) = 50^\circ$ . §41)  $m(\angle BAC) = 80^\circ \Rightarrow m(\angle ABD) = 70^\circ$ ,  $BA \parallel DE \Rightarrow m(\angle DEC) = m(\angle BAC) = 80^\circ$ ,  $AF \cap DE = \{P\}$ ,  $DE \parallel AB \Rightarrow m(\angle EDC) = m(\angle ABD) = 70^\circ$ ,  $\angle EDC = \angle FDP$  (unghiuri opuse la vârf)  $\Rightarrow m(\angle FDP) = 70^\circ$ , în  $\triangle FDP$  dreptunghic  $\Rightarrow m(\angle P) = 20^\circ$ . §42)  $m(\angle DBE) = m(\angle DCE) = 30^\circ \Rightarrow \triangle BDC$  isoscel  $\Rightarrow DE$  bisectoare este și înălțime. §43) ipotenuză - catetă. §44) ipotenuză - unghi ascuțit.

**Triunghiul echilateral:** \* §1)  $24 \text{ cm}$ . §2)  $33 \text{ cm}$ . §3)  $\triangle OBC$  echilateral  $(OB) = (OC) = (BC)$ . \*\* §4) M mijloc  $\Rightarrow MF$  mediană  $\Rightarrow MF$  înălțime și bisectoare. §5) a)  $\triangle AEC = \triangle ADB$ , L.U.L.,  $(AE) = (AC) = (AB) = (AD)$ ,  $\angle EAB + \angle BAC = \angle DAC + \angle BAC$  pentru că  $\angle EAB = \angle DAC$ ; b) la fel. §6)  $\triangle AED = \triangle CDF = \triangle BFE$ , L.U.L.  $\Rightarrow (ED) = (DF) = (EF)$ . §7)  $\triangle AA'C = \triangle CC'B = \triangle BB'A$ , L.U.L.  $\Rightarrow (CA') = (BC') = (AB')$  și  $\angle CAB' = \angle CBA' = \angle A'CC' = \angle C'BB'$ , L.U.L.  $\Rightarrow (A'B') = (A'C') = (C'B')$ . §8)  $\triangle AA'C = \triangle CC'B = \triangle BB'A$ , U.L.U.  $\Rightarrow (AA') = (CC') = (BB')$  și  $(A'C) = (C'B) = (B'A) \Rightarrow \triangle A'AA' = \triangle A'CC' = \triangle C'BB'$ , L.U.L.  $\Rightarrow (BA') = (A'C') = (C'B')$ . §9) BM bisectoare  $\Rightarrow$  mediană  $\Rightarrow MD = CD/2$  și cum  $PD = CD/2$ ,  $(BD) = (CD) \Rightarrow (PD) = (MD)$ . §10)  $\triangle OCN = \triangle OCM$ , L.U.L.  $\Rightarrow (ON) = (OM)$  și  $\triangle OBP = \triangle OBM$ .

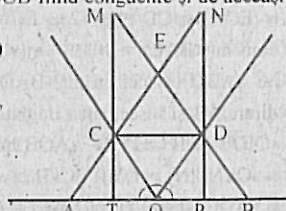
L.U.L.  $\Rightarrow$  (OP)  $\equiv$  (OM)  $\Rightarrow$  (OM)  $\equiv$  (ON)  $\equiv$  (OP). §11)  $\triangle APN \equiv \triangle CNM \equiv \triangle BMP$ , L.U.L.  $\Rightarrow$  (PN)  $\equiv$  (MN)  $\equiv$  (MP). §12) DM și EC înălțimi  $\Rightarrow$  mediane și bisectoare  $\Rightarrow \triangle ODE$  isoscel cu (OE)  $\equiv$  (OD)  $\Rightarrow \triangle ODF \equiv \triangle OEF$ , L.U.L.  $\Rightarrow \angle OFD \equiv \angle OFE$ . §13) a)  $AB \cap DC = \{P\}$ ,  $\triangle PAC \equiv \triangle PDB \Rightarrow AC \parallel BD$ ; b) BM bisectoare în triunghi echilateral  $\Rightarrow$  BM înălțime  $\Rightarrow BM \perp AC$ ,  $AC \parallel BD \Rightarrow \triangle BOD$  dreptunghic. §14) AD bisectoare în triunghi echilateral  $\Rightarrow$  AD mediană  $\Rightarrow$  (BD)  $\equiv$  (DC),  $DE \parallel AB \Rightarrow \angle CDE \equiv \angle CBA$  și  $\angle CED \equiv \angle CAB$  corespondente cum  $\angle CAB \equiv \angle CBA \Rightarrow \angle CDE \equiv \angle CED \Rightarrow$  (CD)  $\equiv$  (EC), dar  $CD = BC/2 \Rightarrow EC = AC/2 \Rightarrow$  (EC)  $\equiv$  (AE)  $\Rightarrow$  E mijloc. §15) în  $\triangle BAD \Rightarrow m(\angle B) = 30^\circ \Rightarrow m(\angle D) = 60^\circ$ , cum  $m(\angle BAE) = 30^\circ \Rightarrow m(\angle EAD) = 60^\circ \Rightarrow \triangle EAD$  echilateral. §16)  $BD \perp AC$ ,  $BD \cap AC = \{M\}$ ,  $\triangle AMD \equiv \triangle AMB \Rightarrow \triangle ABD$  isoscel cu  $m(\angle BAD) = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABD$  echilateral. §17)  $\triangle ACB \equiv \triangle ADB$ ,  $m(\angle CBD) = 60^\circ$ . §18) intersecția dintre AB și bisectoarea unghiului XOY este E,  $\triangle AOE \equiv \triangle BOE$ , L.U.L.  $\Rightarrow \angle AOE \equiv \angle BOE$  și cum OE bisectoare lui  $\angle XOY \Rightarrow B \in OY \Rightarrow \triangle AOB$  isoscel cu  $m(\angle O) = 60^\circ$ . §19)  $BD \cap AC = \{M\}$ ,  $\triangle AMD \equiv \triangle AMB$ ,  $\{M\} = OX \cap EB$ ,  $\triangle OBN \equiv \triangle OCN$ ,  $\{N\} = OY \cap BC$ . Deci  $\triangle OEC$  isoscel cu  $m(\angle EAC) = 60^\circ \Rightarrow \triangle DEC$  echilateral. §21) a)  $DE \cap AC = \{M\} \Rightarrow \triangle AME \equiv \triangle ADE$  isoscel cu  $m(\angle DAE) = 60^\circ \Rightarrow \triangle ADE$  echilateral; b)  $AB \cap FC = \{R\} \Rightarrow \triangle ARC \equiv \triangle ARF \Rightarrow$  (AF)  $\equiv$  (AC)  $\Rightarrow \triangle AFB$  isoscel ((AF)  $\equiv$  (AB)) cu  $m(\angle FAB) = 60^\circ \Rightarrow \triangle AFB$  echilateral. §22) BP și AM mediane  $\Rightarrow$  (MC)  $\equiv$  (PC)  $\Rightarrow$  ipotenuză - catetă. §23)  $m(\angle RAD) = m(\angle PAD) - m(\angle BAC/2)$  (pentru că AP bisectoare)  $\Rightarrow m(\angle RAD) = 60^\circ \Rightarrow \triangle BAR \equiv \triangle DAR$ , catetă - unghi ascuțit  $\Rightarrow$  (BR)  $\equiv$  (DR). §24) a) ca la 23)  $\Rightarrow$  (BR)  $\equiv$  (RE) și (DP)  $\equiv$  (PC), cum (BR)  $\equiv$  (PC)  $\Rightarrow$  (DC)  $\equiv$  (BE); b) se arată că  $\triangle ARE \equiv \triangle ARD$ ,  $\triangle APC \equiv \triangle APD \Rightarrow \angle DAP \equiv \angle PAR \equiv \angle RAE$ ,  $m(\angle DAP) = 60^\circ \Rightarrow m(\angle DAE) = 180^\circ \Rightarrow D, A, E$  coliniare. §25)  $120^\circ$  și  $60^\circ$ . §26) bisectoarea unghiului  $\angle A$  va fi și înălțime în  $\triangle ABC$  echilateral și în  $\triangle AMN$  isoscel  $\Rightarrow AR \perp MN$  și  $AR \perp BC \Rightarrow MN \perp BC$ .

**Proprietățile triunghiului dreptunghic : \*\*** §1)  $\triangle OCD$  dreptunghic cu  $m(\angle O) = 30^\circ \Rightarrow$  cateta  $CD = OC/2 = 3$  cm. §2)  $\triangle OCD$  dreptunghic cu  $m(\angle O) = 60^\circ \Rightarrow m(\angle D) = 30^\circ \Rightarrow OC = OD/2 \Rightarrow OD = 16$  cm,  $\triangle OCD$  dreptunghic cu  $m(\angle O) = 60^\circ \Rightarrow m(\angle OCE) = 30^\circ \Rightarrow OE = OC/2 = 4$  cm. §3) 2 cm. §4) cum (BC)  $\equiv$  (AC) și (BC)  $\equiv$  (CD)  $\Rightarrow$  (AC)  $\equiv$  (CD)  $\Rightarrow \triangle ABC$  isoscel cu  $m(\angle ACD) = 120^\circ \Rightarrow m(\angle CAD) = 30^\circ \Rightarrow m(\angle BAD) = 90^\circ$ . §5) cum  $\triangle ABD \equiv \triangle AED \Rightarrow \triangle ABE$  isoscel cu  $m(\angle B) = 60^\circ \Rightarrow \triangle ABE$  echilateral cum  $m(\angle C) = 30^\circ$  și  $m(\angle CAE) = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ$ ,  $\triangle AEC$  isoscel  $\Rightarrow$  (AE)  $\equiv$  (EC)  $\equiv$  (EB)  $\Rightarrow$  AE mediană.

#### Capitolul XIV : Probleme pentru pregătirea concursurilor școlare

§1)  $\frac{a+b}{\frac{1}{6}} = \frac{a+c}{\frac{1}{4}} = \frac{b+c}{\frac{1}{3}} = \frac{2(a+b+c)}{\frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{1}{3}} = k \Rightarrow a+b+c = \frac{3k}{8}$ ; din  $a+b+c = \frac{3k}{8}$  și  $a+b = \frac{k}{6} \Rightarrow c = \frac{3k}{8} - \frac{k}{6} = \frac{5k}{24} \Rightarrow$   
 $b = \frac{k}{8}$ ;  $a = \frac{k}{24}$ ; din  $\frac{23 \cdot \frac{k}{8} \cdot \frac{k}{24} \cdot \frac{5k}{24}}{\frac{k}{24} \cdot \frac{k}{8} + \frac{k}{24} \cdot \frac{5k}{24} + \frac{k}{8} \cdot \frac{5k}{24}} = 15 \Rightarrow a = \frac{24}{24} = 1$ ;  $b = \frac{24}{8} = 3$ ;  $c = \frac{5 \cdot 24}{24} = 5$ . §2) a)  $k \Rightarrow m(\angle C) = 45^\circ$  și  
 $\frac{m(\angle A)}{2} = \frac{m(\angle B)}{4} = k \Rightarrow m(\angle A) = 2k$ ,  $m(\angle B) = 4k$ . Cazuri : dacă  $m(\angle A) = m(\angle C) = 2k \Rightarrow k = \frac{45^\circ}{2}$ , deci  $m(\angle A) =$   
 $m(\angle B) = 90^\circ$ . Dacă  $m(\angle B) = m(\angle C) = 4k$ , deci  $m(\angle B) = m(\angle C) = 72^\circ$  și  $m(\angle A) = 36^\circ$ . b)  $3AB = 5BC = AB = \frac{k}{3}$ ,  $BC = \frac{k}{5}$ .  
Cazuri : dacă  $AB = AC = \frac{k}{3}$ , atunci  $\frac{k}{3} + \frac{k}{3} + \frac{k}{5} = 143 \Rightarrow k = 165$ . Deci  $AB = AC = \frac{165}{3} = 55$  cm și  $BC = \frac{165}{5} = 33$  cm.  
Dacă  $BC = AC = \frac{k}{5}$ , atunci  $\frac{k}{5} + \frac{k}{5} + \frac{k}{3} = 143 \Rightarrow k = 195$ . Deci  $BC = AC = \frac{195}{5} = 39$  cm și  $AB = \frac{195}{3} = 65$ . §3)  
 $a = \frac{20}{100}b = \frac{1}{5}b$ ;  $b = \frac{20}{100}c = \frac{1}{5}c$ ;  $c = \frac{1}{5}d$ ;  $\Rightarrow$  Notăm  $d = x$ ,  $c = \frac{1}{5}x$ ;  $b = \frac{1}{25}x$ ;  $a = \frac{1}{125}x$ ;  $\sqrt{\frac{x^4}{625 \cdot 25}} = x$ ;  $\frac{x^2}{125} = x \Rightarrow x = 125$ ;  $d = 125$ ,  $b = 25$ ,  $c = 5$ ,  $a = 1$ . §4) a) 200 segmente; b) 100a. §5) Fiind o sumă  
de numere pozitive, egalitatea este adevărată numai în cazul în care  $x - y + 5 = 0$  și  $y - 3 = 0$ , adică  
 $y = 3$  și  $x = -2$ . §6)  $BC = 20$  cm.  $P_{ABCD} = AB + BC + CD + DA = 15 + 20 + 90 = 135$  cm;  $AD + CD = \frac{9}{4}CD$ ; atunci  
 $CD = 90 \cdot \frac{4}{9} = 40$  cm iar  $AD = 50$  cm. §7) Dacă numerotezi locurile ca în figura alăturată și alegi o ordine de așezare cum  
ar fi : mama, tata și apoi copiii, găsește 6 situații posibile, adică (1, 2, 3, 4); (1, 2, 4, 3); (1, 4, 2, 3); (1, 4, 3, 2); (1, 3, 2, 4); (1, 3, 4, 2).  
Așadar sunt în total 24 de situații posibile.  $P(E_1) = \frac{2}{3}$ ,  $P(E_2) = P(E_3) = \frac{1}{3}$ . §8) Notează măsurile unghiurilor cu  $u$  și  $v$ .  
Atunci se obțin relațiile :  $u - v = 36^\circ$  și  $u + v = 90^\circ$ . Adună cele două relații membru cu membru, deci  $2u = 126^\circ$  iar  $u = 63^\circ$ . Așadar  
suplementele au măsurile de  $117^\circ$  și respectiv  $153^\circ$ . §9) 1. §10) Din  $\frac{x}{2} = \frac{y}{a} = k$  și  $x^2 + y^2 = 216$ ,  $(6k)^2 xy \Rightarrow 3a^2 - 13a + 12 = 0$ . Cum

$a \in \mathbb{N}$ , prim și se observă că  $3 \mid 3a^2$  și  $3 \mid 12 \Rightarrow 3 \mid 13a \Rightarrow a = 3$ . §11) Din  $\frac{x}{14} = \frac{y}{6} = \frac{z}{10} = k \Rightarrow x = 14k, y = 6k, z = 10k$   
 $\Rightarrow (x; y; z) = 2k \Rightarrow [x; y; z] = 2k \cdot 7 \cdot 3 \cdot 5 \Rightarrow 420 = 2k \cdot 7 \cdot 35 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow x = 28, y = 12, z = 20$ . §12) Notăm  $m(\angle xoy) = 2x$   
și  $m(\angle xoz) = 2y \Rightarrow 2x + 2y = 180^\circ$  și  $y - x = 32^\circ \Rightarrow m(\angle xoy) = 58^\circ$  și  $m(\angle xoz) = 122^\circ$ . §13).  $x = (2^{2000} \cdot 5^2 \cdot 3^{27})$   
 $: 2^{3000} : 5 : 3^{20} = 2^2 \cdot 5 \cdot 3 = 60; y = 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^2 + 1 = 21$ ; Deoarece  $a < b$  și  $ab$  cel mai mic număr natural divizibil cu  
5  $\Rightarrow ab = 15$ . Atunci a)  $(x; y; z) = (60; 21; 15) = 3; [x; y; z] = [60; 21; 15] = 420$ ; b).  $(x; x - z) = (60; 45) = 15; [x;$   
 $y + z] = [60; 36] = 12$ ; c). 25%; 5%. §14). a). În figura alăturată:  $\triangle AOC, \triangle COD$  și  $\triangle DOB$  fiind congruente și de aceeași  
parte a dreptei AB, vor avea câte  $60^\circ$  fiecare. Din  $[AO] = [OC] = [OD] = [OB] \Rightarrow \triangle AOC, \triangle COD,$   
 $\triangle DOB$  sunt isoscele cu câte un unghi de  $60^\circ \Rightarrow$  sunt echilaterale.  $m(\angle ECD) = 60^\circ$  și  $m(\angle EDC)$   
 $= 60^\circ$ , deci  $\triangle CED$  este echilateral de latură  $[CD]$  ca și  $\triangle COD \Rightarrow \triangle CED \cong \triangle COD \Rightarrow$   
 $[CO] = [ED]$ ; b). Calculăm  $m(\angle MEC) = 120^\circ$  și  $m(\angle NED) = 120^\circ$ ; calculăm  $m(\angle TCA) = 30^\circ$ ,  
opus la vârf cu  $\angle MCE \Rightarrow m(\angle MCE) = 30^\circ$ . Se află  $m(\angle PDB) = 30^\circ$ , opus la vârf cu  
 $\angle NDE \Rightarrow m(\angle NDE) = 30^\circ$ . Din faptul că  $\triangle CED$  echilateral  $\Rightarrow [CE] = [ED]$ . Din  
 $\angle MCE = \angle NDE, [CE] = [ED], \angle MEC = \angle NED \Rightarrow \triangle MEC \cong \triangle NED$  (U.L.U.) §15).  $x, y, z, t$   
fiind unghiuri în jurul unui punct fac împreună  $360^\circ; x + y + z + t = 360^\circ$  (1);  $\{2x; 4y; 3z; 5t\}$   
d.p.  $\{4; 12; 6; n\} \Rightarrow \frac{2x}{4} = \frac{4y}{12} = \frac{3z}{6} = \frac{5t}{n} \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{2} = \frac{t}{\frac{n}{5}} = k; k \in \mathbb{Q}_+^*$ , deci  $x = 2k; y = 3k; z = 2k; t = \frac{n}{5}k$ . Din (1)  $\Rightarrow 2k +$



$3k + 2k + \frac{n}{5}k = 360^\circ$ ; iar  $x + z = y + t \Rightarrow 2k + 2k = 3k + \frac{n}{5}k \Rightarrow k = \frac{m}{5}k; k \Rightarrow m = 5 \Rightarrow 2k + 3k + 2k + k = 360^\circ \Rightarrow k = 45^\circ$   
 $\Rightarrow x = 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ; y = 3 \cdot 45^\circ = 135^\circ; z = 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ; t = 45^\circ$ . §16). Fie  $AB = BC = CD = x$  și  $DK = KM = ML = y \Rightarrow 3x +$   
 $3y = 72 \text{ cm} \mid : 3 \Rightarrow x + y = 24 \text{ cm}$ . a).  $CK = CD + DK = x + y = 24 \text{ cm}$ ;  $BM = BC + CD + DK + KM = x + x + y + y = 2x + 2y =$   
 $2(x + y) = 2 \cdot 24 \text{ cm} = 48 \text{ cm}$ . b). Dacă  $C \in (AL)$  astfel încât  $AC = CL \Rightarrow AC = 72 : 2 \text{ cm} = 36 \text{ cm}$ . Deci  $AB = 36 \text{ cm} : 2 = 18 \text{ cm}$ .

## Capitolul XVI: Teste pentru evaluare

Testul 1 : I. §1). c. §2). b. §3). b. §4). b. §5). a. §6). c. §7). c. §8). c. §9). a. II. §10).  $x = 3$ . §11). (6; 144) și (18; 48).  
§12).  $36^\circ; 48^\circ; 60^\circ; 96^\circ; 120^\circ$ . §13). 9; 11 și 13 ani. §14). a).  $\angle BCD = \angle CDE$  (alt.-int.)  $\angle BCD = \angle DCE$  (CD  
bisectoare)  $\Rightarrow \angle CDE = \angle DCE \Rightarrow \triangle DEC$  isoscel  $\Rightarrow DE = EC$ ; b).  $\triangle EDC$  isoscel  $\Rightarrow$  înălțime  $\triangle EFC$  este și mediană  $\Rightarrow BF = DF = FC$ ;

c).  $BF = FC \Rightarrow \triangle FBC$  isoscel  $\Rightarrow \angle EDF = \angle FBC$ . Testul 2 : I. §1). -27. §2). înălțime. §3). 183 litri. §4).  $x = \frac{11}{4}$ . §5).  
 $\frac{3}{8}; \frac{2}{5}; \frac{1}{2}; \frac{17}{20}$ . §6). 3. §7).  $x = \{0; 4; 8\}$ . §8). cateta cealaltă. §9).  $\frac{1}{11}$ . II. §10).  $n^2 - n = n(n - 1)$  este produs de numere  
consecutive  $\Rightarrow$  este par. §11). 4913 litri. §12).  $\frac{825}{1020}$ . §13). 6 cutii. §14). a). se arată că  $\triangle ABC \cong \triangle CDA$ ; b). 22 cm.

Testul 3 : I. §1). a-5; b-4; c-2; d-7; e-3. §2). a). 1001; b).  $x \in \{1; 7\}$ ; c). 4; d).  $\frac{14}{9}$ . II. §3). 1. §4). a). 2; b). 0,06. §5).  
42 nucii. §6). 42 cm. §7). 7 cm. §8). 25. Testul 4 : I. §1). 17 m<sup>3</sup>. §2).  $\frac{1}{2}$ . §3).  $\frac{6}{19}$ . §4). 75°. §5). 45°. §6). dreptunghi.

§7). 24. §8). a).  $\frac{41}{30}$ ; b). -2. II. §9). a).  $\frac{17}{22}$ ; b).  $b = \{0; 1\}$ . §10). 24. §11). 1680 sticle. §12). a). U.L.U.; b).  $AC \cap BD$   
 $= \{E\}$ ; se arată că  $\triangle ABE \cong \triangle CBE$ ; c). mediatoare. Testul 5 : I. §1). însumate dau  $90^\circ$ . §2). 86. §3). 41°. §4).  
bisectoare și mediatoare. §5). 70°. §6). 72°. §7). 3 zile. §8). 34. §9). 21. II. §10). 4. §11). 1155. §12). a). 1,5; b).  
 $x \in \{0; 1; 2; 3; 4\}$ . §13). se arată că  $\angle CAE = \angle CEA$  folosind paralelele. §14). a).  $A_{\triangle ADM} = A_{\triangle AEM} = A_{\triangle BMC} : 2$ ; b).  $\triangle ABM$   
isoscel, MD mediană  $\Rightarrow MD \perp AB$ ;  $\angle DMB = \angle MBC$  pentru că au același complement  $\angle DBM$ . Testul 6 : §1). 8.  
§2). 

zi	1	2	3	4	5	6
aria(dm <sup>2</sup> )	2	4	8	16	32	64

 §3). 125 boabe piper, 150 g sare, 25 leg. mărar. §4). 4°C.

§5). 1200 m<sup>2</sup> în total; 360 m<sup>2</sup> cu roșii; 120 m<sup>2</sup> cu ardei; 420 m<sup>2</sup> cu castraveți. §6). a).  $V = 126 \text{ m}^3$ ; b). 82. §7). Fie  
 $MP \perp AB, MR \perp AC$ , se demonstrează că  $MP = MR$ . Testul 7 : §1). 12°C. §2). 4,28 lei. §3). cu 50%. §4). a). 120 : 12  
și 144 : 12; b). 120 : 15 și 144 : 15; c). nr. max. = c.m.m.d.c.(144; 120) = 24 grupe, nr. minim = 1 grupă. §5).  $r = 3 \text{ m}$ ,  
 $c = 4 \text{ m}, t = 2 \text{ m}$ . §6). a). 8000 cm<sup>3</sup> = 8 l apă; b). 8 l = 8000 ml; 8000 : 500 = 16 sticle. §7). a). 96 m<sup>2</sup>; b). 9,6 m; c). BM  
mediană  $\Rightarrow A_{\triangle ABM} = A_{\triangle BMC}$ . Testul 8 : §1). 5 ouă; 50 ml ulei; 550 g zahăr, 25 stafide. §2). 1,5 m. §3). a). 6,57 kg; b).

2, (2) lei. §4).  $m_i = -9,7^\circ\text{C}$ . §5). nr. max. = c.m.m.d.c. (45; 75) = 15 pungi. §6). 6m<sup>3</sup> = 6000 l apă, 6000 : 75  
= 80 minute. §7). a).  $AC = 10 \text{ m}$ ; b).  $m(\angle M) = 60^\circ$ ; c).  $MB = 16 \text{ m}$ . Testul 9 : §1). 1,425 kg apă. §2). suma max.  
= 6. §3). a). vineri; b). luni. §4). a). 4 gropi; b). 2 ore. §5). I = 1424 lei; II = 56,96 lei; III = 2314 = 1210,4 lei.  
§6). 72 dm<sup>3</sup> = 72000 cm<sup>3</sup>; 72000 : 1000 = 72 cutii de biscuiți; b). 7,2 kg; c). 129,6 lei. §7). a). se arată că  $\triangle ABC \cong \triangle BCD$   
 $\Rightarrow \angle ABC = \angle BCD$ ; b). se demonstrează că  $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ . Testul 10 : §1). 1 oră. §2). nr. copii = c.m.m.m.c. [2;  
3; 5] = 30 elevi. §3). a). 0,6; b). 360 bureți; 120 hribi; 90 creasta cocoșului; 30 pălăria șarpelui. §4). a). 3 zile; b). 160  
pag. §5). 360 km; 16, (6)%. §6). a). 90 buc. gresie; b). 90 : 10 = 9 cutii, 9 : 45 = 405 lei. §7).  $m(\angle BHC) = 140^\circ$ ,  
 $m(\angle BIC) = 110^\circ$ . Testul 11 : §1). a). 5360; b). 12500. §2).  $-\frac{3}{7}^\circ\text{C}$ . §3). 19 fete. §4). a). 30 elevi. §5). 36°. §6).

a). 12 m și 62 m; b). 64 brațuți; 3648 lei. §7). a). Fie  $h$  lungimea înălțimii din A în  $\triangle ABC$  care coincide cu înălțimea  
din A în  $\triangle ABN \Rightarrow A_{\triangle ABC} = \frac{h \cdot BC}{2} = \frac{h \cdot 3BN}{2} = 3 \cdot \frac{h \cdot BN}{2} = 3 \cdot A_{\triangle ABN}$ ; b). MN mediană în  $\triangle ANC \Rightarrow A_{\triangle BMC} = \frac{1}{2} \cdot A_{\triangle ANC}$ .  
Testul 12 : §1).  $\frac{7}{25}$ . §2). a). I : 80; b). L = 16 m, l = 9,6 m. §3). a).  $\frac{5}{48}$  din bazin; b). în 9,6 ore. §4). a). 63,65 lei; b). 36,35 lei.  
§5). a). 12 bluze; b). (12b; 0r); (9b; 2r); (6b; 4r); (3b; 6r); (0b; 8r). §6). 81° și 99°. §7). a). 15000 m<sup>2</sup> > 11700 m<sup>2</sup>; b). 5,574 tone.